啊 哈！灵 机 一 动

〔美〕马丁·迦德纳著

白英彩 崔良沂译

上海科学技术文献出版社

目　　录

第一章　组　　合

组合分析，或称组合数学，是一门研究如何安排事物的学科。用稍专门化的术语来说，组合分析就是研究按各种特定规则一些元素可能组成的集合的方式和那些组合的特性。

举例来说，本章的第一个问题就是关于不同颜色的泡泡糖可能具有的组合方式。这个问题要求读者求出符合某种性质的有色泡泡糖的最小集合。第二个问题是关于一张淘汰赛表上球员的分组比赛方式，与计算机数据分类颇为相似。

组合分析往往是求某些事物按某些规则不同的组合方式总共有多少。本节提出了所谓“枚举问题”，求苏珊去学校共有几种走法。在这个例子中，组合的元素是沿着矩阵边的路线中的若干线段。此已涉及到几何图形，所以我们进入了“组合几何”的领域。

数学的每一分支都有其组合的方面。在本书各章中你都能看到组合问题，有组合算术、组合拓扑学、组合逻辑和组合集合论，甚至还有组合语言学，见文字游戏一章。组合数学在概率论中特别重要。在概率论中，必须列出所有可能的元素组合才能得出一个概率公式。有一本著名的概率问题集：《选择和机会》。书名中“选择”一词系指该书的组合方面。

我们的第一个问题即与概率有关，它是寻求关于有色泡泡糖的某种安排，要求确保（即其概率为1）达到某种特定要求。文中指出，从求元素不同组合的数目这样简单的问题出发，可以提出无穷无尽的概率问题。在“苏珊去学校的路线”问题上，可以看出帕斯卡三角形与解初等概率问题有着非常密切的关系。

显然，对于一个给定的组合问题，其符合题意的各种组合的数目可以是0、1、任何一个有限数或一个无穷数。在两个奇整数的组合中，没有一个组合其元素之和也是奇数。在两个质数的组合中，只有一个组合其元素之积等于21。但在两个正整数的组合中，有三个组合其元素之和等于7(即一颗骰子相反两面上的一对数字)。而由两个偶数组成的组合中，其元素之和也是偶数的组合则有无限多个。

在组合理论中，要作出关于不存在符合题意的组合的"不可能性"证明，往往是极其困难的。例如，直到最近才证明了对于每张地图来说，没有一个平面区域的组合需要涂上五种颜色*。这曾是组合拓扑学上著名的悬而未决的问题。这个不可能性证明要用到一个十分复杂的计算机程序。

另一方面，也有许多组合问题，其不可能性初看上去很难证明，但有时灵机一动，一下子就证出来了。在本章"难铺的瓷砖"问题中，通过简单的"奇偶校验"立即可以证明组合的不可能性，而用任何别的方法则难以成功。

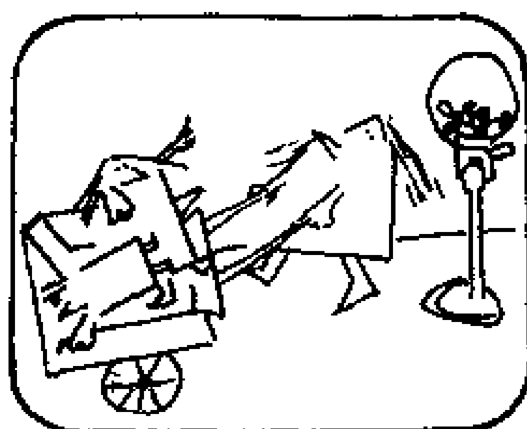
问题之二为"药品错混"，把组合的思想运用于不同基数的运算系统。我们看到，数字本身及其在位置记数法中用数码来表示的方式都依组合规则而定。事实上，一切演绎推理，无论属于数学还是纯粹逻辑，都是根据某个系统的规则处理"一串"符号的组合(该系统确定这个串是否为一个有效的断定)。这就是为何十七世纪的组合数学之父戈特弗里德·莱布尼茨**称推理技巧为组合技巧的缘由。

---

* 四色问题，即每一幅地图都可以只用四种颜色来着色，使具有公共边界的国家涂有不同的颜色。1976年美国伊利诺斯大学数学教授肯尼思·阿佩尔和沃尔夫冈·哈肯利用计算机证明了这一猜想——译注

** 莱布尼茨(Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646～1716)，德国自然科学家、数学家——译注

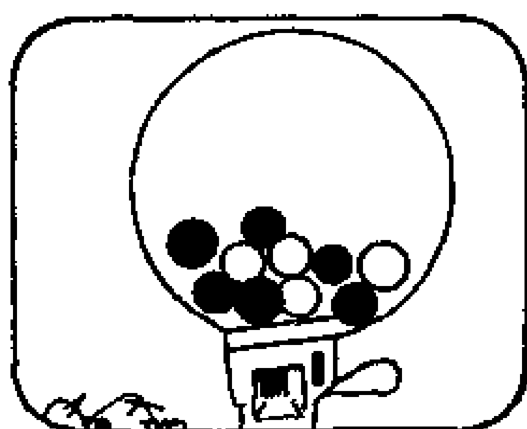
泡泡糖问题



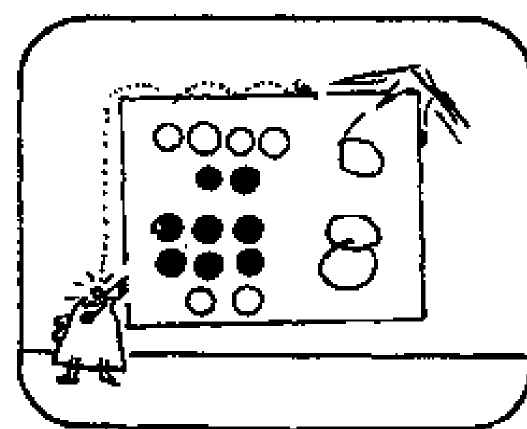
可怜的琼斯夫人路过泡泡糖出售机时，尽量不使她的双生子有所察觉。

第一个双生子：妈，我要泡泡糖。

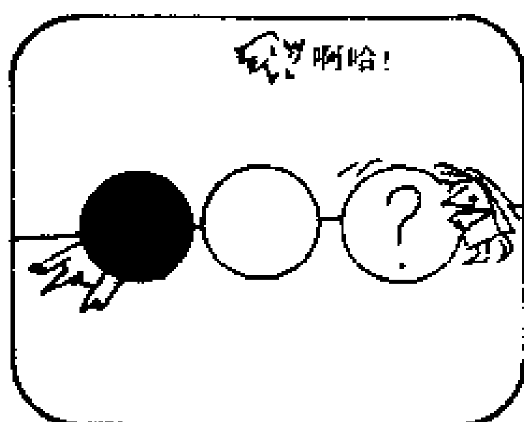
第二个双生子：妈，我也要。我要和比利拿一样颜色的糖。



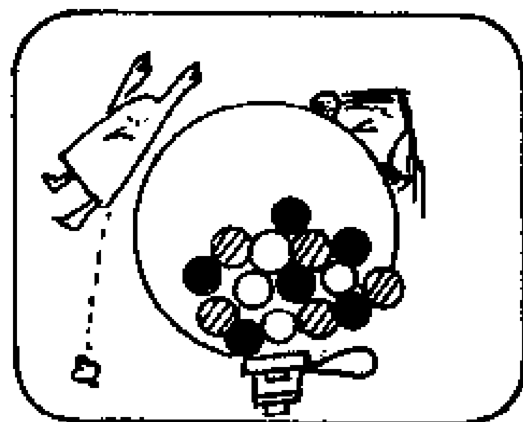
分币泡泡糖出售机几乎已空了。说不准下一粒是什么颜色。琼斯夫人如要得到两粒同色的泡泡糖，需要准备花多少钱？



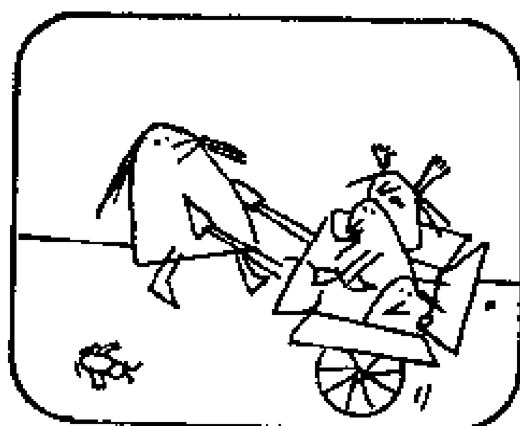
琼斯夫人若花6分钱，准可得到2粒红色的糖——就算所有白色的糖花去4分，尚剩2分可用来取得2粒红色的糖。或者她花8分准可得到2粒白色的糖。所以她得准备花8分钱，对吗？



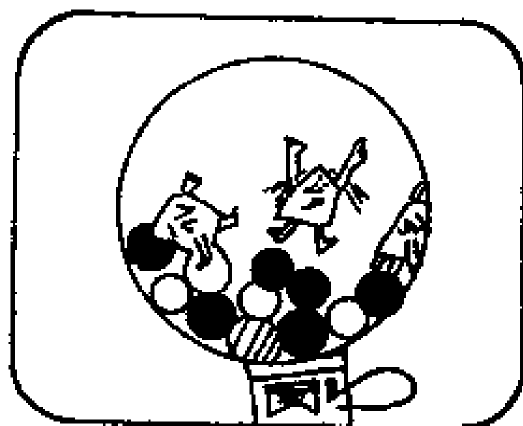
不对。即使先取到的两粒糖颜色不同，第三粒必定与前两粒中的一粒同色。所以她最多只需准备花3分钱。



现在假设出售机内的糖有6粒是红的，4粒是白的，5粒是蓝的。琼斯夫人手头需要有多少钱才能确保拿到两粒同色的泡泡糖，你算得出吗？



你算出是4分，对吗？如是这样的话，那么请你考虑一下，如史密斯夫人带着三生子经过泡泡糖出售机，将会遇到什么情况。



这一次，出售机内的糖有6粒是红的，4粒是白的，而仅有1粒是蓝的。史密斯夫人如要拿到3粒同色的泡泡糖需准备花多少钱？

花多少钱？

第二个泡泡糖问题只是把第一个问题稍加改变而已，亦可以依同样的思路来解答。这时，第一次拿到的3粒糖有可能颜色不同——红、白、蓝。这是"最坏"的情况，因为抽取结果不能如愿的次数最多。第四粒必定是这三种颜色中的一种。若要得到两粒同色的糖，就需要买4粒糖，所以琼斯夫人须准备花4分钱。

显然，这还可推广至n组糖(每组糖的颜色不同)的情况。如果有n组糖，只需准备买$n+1$粒糖即可。

第三个问题更难一点，即史密斯夫人带的是三生子而非双生子，泡泡糖出售机内的糖有6粒红的，4粒白和1粒蓝的，她要得到3粒同色的糖需花多少钱？

如前一样，我们首先考虑最坏的情况。史密斯夫人有可能得到2粒红的，2粒白的以及那一粒蓝的，总共是5粒糖。第6粒不是红的就是白的，因此可以保证得到3粒同色的糖，所以答案是6分钱。如假定蓝色的糖不止一粒，她可能每种颜色的糖都抽到一对，这时就需要有第7粒糖以配成3粒同色的糖。

啊哈！关键在于"看到""最坏"情况的长度。若使用死办法，把11粒糖各标以一个字母，然后考虑所有可能的抽取顺序，看哪一个顺序在3粒同色糖出现之前的初链最长，那么这种解法需要列出$11!=39,916,800$种序列！即使考虑问题时不区分同色的糖，仍然需要列出2,310种序列。

如何将其推广至k粒同色的糖，请看如下所述。若有n组糖(每组糖各有一种颜色，且至少有k粒)，为了得到k粒同色的糖，就需抽取$n(k-1)+1$粒糖。如果一组或几组同色的糖少于k粒，情况又会怎样？请你不妨一试，也许你会感兴趣。

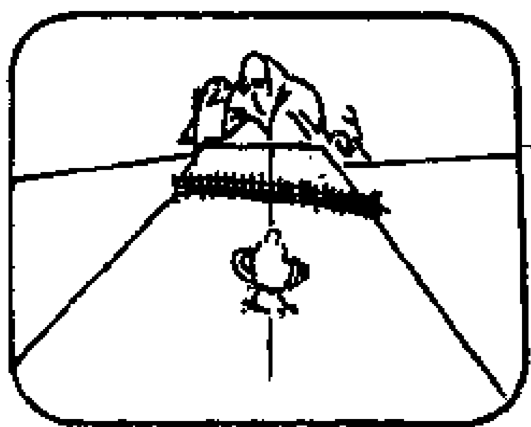
还可用许多其它的方式作出这种问题的模型。例如，若要

从一副 52 张的纸牌中抽到譬如说 7 张同花的牌，那么需要抽取多少张牌？这里，$n=4$, $k=7$。根据公式，答案是

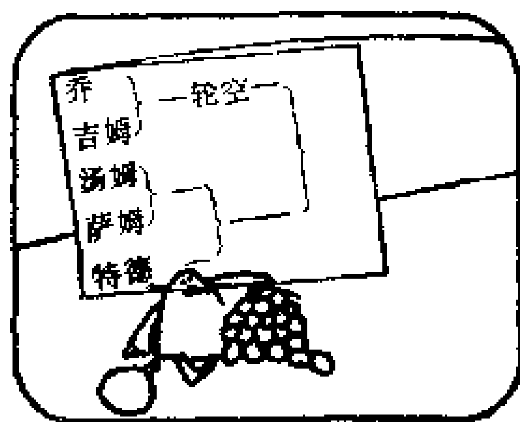
$$4(7-1)+1=25。$$

虽然这些只是简单的组合问题，但却可以从中引伸出一些有趣而困难的概率问题。举例来说，若你抽取 n 张牌（n 的范围是 7 至 24)，且每张牌取出后不再放回，问抽到 7 张同花的概率是多少？（显然，如果你抽取的牌少于 7 张，则概率为 0；如果你抽取 25 张或更多的牌，则概率为 1。）若你每次把牌抽出后再放回去且把牌重新洗过，那么其概率有何变化？还有一个更加困难的问题：设把牌抽出后重新放回或不再放回，若要拿到 k 张同花牌，问抽取牌次数的期望值（即从整体来看的平均数）是多少？

乒乓赛难题

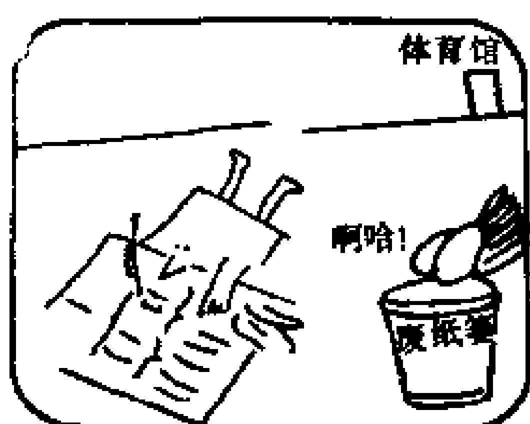


米勒德·菲尔莫尔初级中学乒乓俱乐部的五个成员决定举行一次淘汰赛。

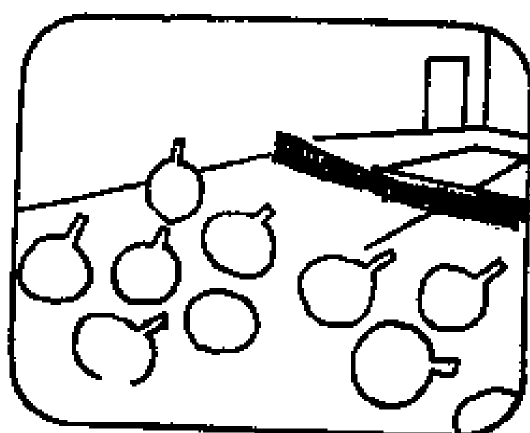


教练员这样说明他的比赛表。

教练员：由于 5 是奇数，因此在第一轮中有一个球员“轮空”。第二轮中还得出现一次“轮空”。一共要进行四场比赛。



第二年乒乓球盛行，俱乐部拥有三十七名成员。教练员又在筹划一次“轮空”尽可能最少的比赛。你能算出有多少场比赛吗?



你还没有算出？你还在画表吗？你没有悟到，啊哈！每场比赛淘汰一名球员，一共要淘汰三十六名球员，所以不多不少需进行三十六场比赛，不是吗?

多少次轮空?

为了解这个问题，可画一张 37 名球员实际比赛表。你如果采取这种死板方法，可能会发现：这张表无论如何画，不多不少总是有四次轮空。所需轮空的次数，是球员人数 n 的一个函数。如何才能算出轮空的次数呢?

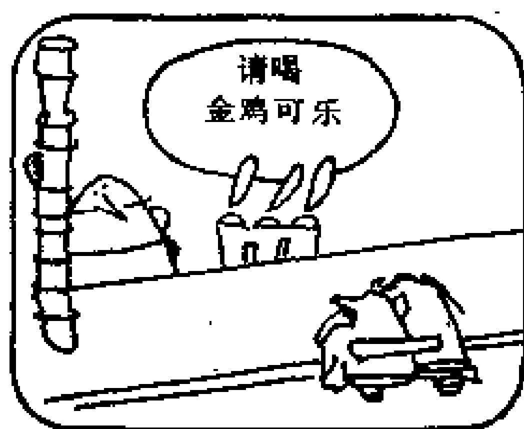
给定 n，轮空次数可以按下列方法来确定：从等于或大于 n 的 2 的最少次幂中减去 n，把余数用二进制表示，其中 1 的个数即为轮空的次数。在这个例子中，我们把 64(即 2^6)减去 37 得到 27。27 用二进制表示就是 11011，其中共有四个“1”，因此这次比赛共有四次轮空。证明这一奇妙算法的正确性是一次很有趣的练习。

这个问题中所描述的比赛类型常被称为“淘汰赛”。它符合计算机科学家称为在一个包含 n 个元素的集合中通过两两比较

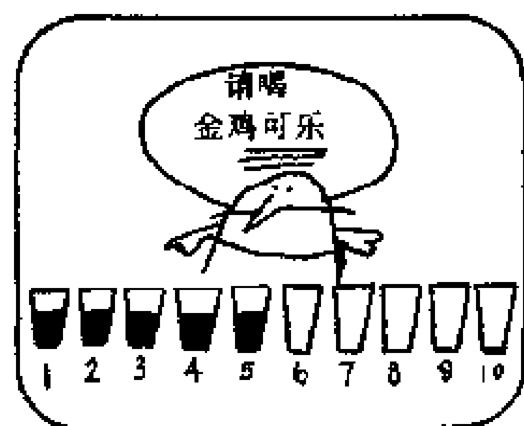
来确定最大元素这样一种算法的情况。正如我们所知，恰需经过 $n-1$ 次两两比较才能确定最大值。计算机的分类操作也可以采取对 3 个、4 个、5 个等元素组成的集合进行比较的方法。

分类在计算机科学中至为重要，有些书籍通篇论述其应用。你很容易想到许多实际的问题，其中包含有很重要的分类过程。据估计，在科学、事务处理和工业上使用的计算机，其四分之一左右的运行时间是花在分类问题上的。

奎贝尔*的玻璃杯

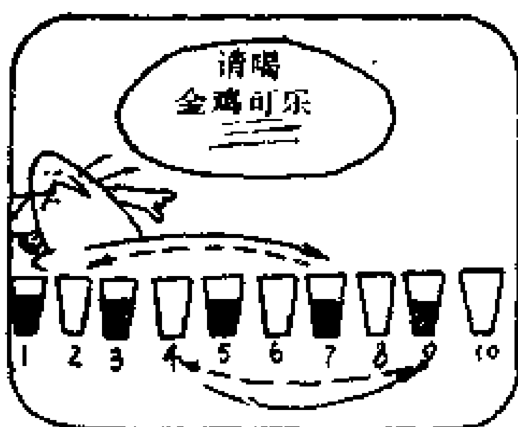


巴尼在汽水柜台工作。他用 10 只玻璃杯给两名顾客出了个难题。

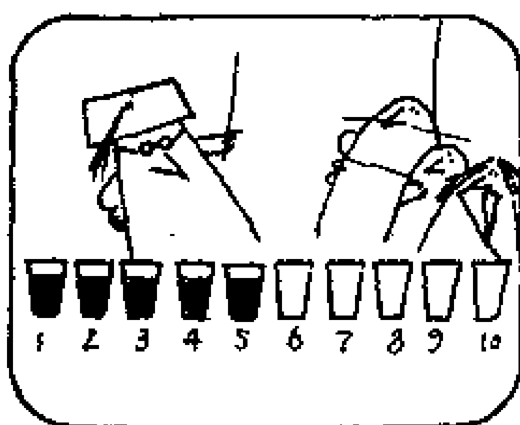


巴尼：这一排有 10 只玻璃杯，左边 5 只内有汽水，其余 5 只空着。请你使这排杯子变成满杯和空杯相互交错，条件是只允许移动四只杯子。

* 奎贝尔(quibble)一词在英文中是模棱两可、双关语之意——译注

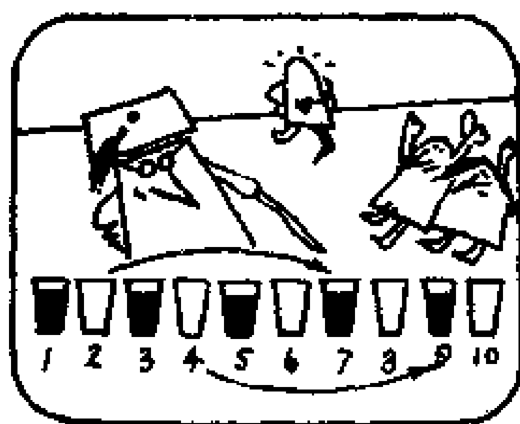


巴尼：好，只要分别把第二只和第七只，第四只和第九只交换一下位置就成了。



奎贝尔教授碰巧听见了，他总爱耍点花招。

奎贝尔教授：何须移动四只？我只要移动两只就行了，你行不行？



奎贝尔教授：很简单。只要拿起第二只杯子，把里面的汽水倒进第七只杯子，再拿第四只杯子把汽水倒进第九只杯子就行了。

不寻常的奎贝尔

虽然奎贝尔教授抓住话语中的模棱两可之处解了这个问题，但这个问题并不象乍看上去那么简单。例如，还是这么一个问题，但改成100只满杯挨着100只空杯排成一排，请考虑一下，若要使其变成满杯和空杯交错排列，需将多少对杯子互换位置？

如果真的使用200只杯子来解答这一问题显然不大合乎实际，所以第一步不妨分析一下 n 值较小时的情况，n 为满(或空)杯的数目，以得出一个模式。你研究这个问题时可以利用两种颜色的筹码(也可用正面朝上和正面朝下的牌，正面朝上或正面朝下的硬币，或两种不同币值的硬币)。如果 $n=1$，则无需移动；当 $n=2$，显然是把一对筹码移动一次。你也许会有点惊讶，当 $n=3$ 时，也是把一对筹码的位置交换一次。再进一步做下去，你就会悟出一个简单的模式：当 n 为偶数时，互换位置的次数为 $n/2$ 次，当 n 为奇数时，则为 $(n-1)/2$ 次。所以如果是100只满杯和100只空杯，互换50次位置就成了。

这样需移动100只杯子。奎贝尔的解题花招可以把需要移动的杯子数减少一半。

有一个与刚才分析的问题非常相似但困难得多的古典难题。一种类型的 n 件东西，紧挨着另一种类型的 n 件东西排成上述那样的一排(同上面一样，也可采用玻璃杯、筹码和纸牌等)。你想使这一排中不同类型的东西相互交错，但这里我们规定不同的"移动"方法：这次只准把任意一对相邻的筹码移动至一排中空着的位置，且滑动时不得改变这两个筹码的左右顺序。

例如，当 $n=3$ 时，解题过程如下所示：

```
XXXOOO
  XOOOXX
  XOO  XOX
    XOXOXO*
```

普遍的解是什么？当 $n=1$，是没有意义的；当 $n=2$，你立即会发现无解；当 $n>2$，解此问题至少须作 n 次移动。

当 $n=4$ 时，求解不很容易，你不妨一试，煞是有趣，或许你能把当 $n\geqslant3$ 时的解题过程公式化。

* 原文如此，应为OXOXOX——译注

根据这一难题还可产生许多奇异的变相问题，用来测验你的智力。这里试举几例：

1．在移动一对相邻的筹码时，若两者颜色不同，则将其位置互调，除此以外，其余规定不变。这样，一对黑-红筹码在移至新的位置前就变成一对红-黑筹码。解 8 个筹码移动五次。对于 10 个筹码来说，作 5 次移动也够了。我们尚不知道它的普遍解，也许你能找出来。

2．某种颜色的筹码少一个，即某种颜色的筹码有 n 个，另一种颜色的筹码则有 $n+1$ 个，除此以外，其余规定不变。已经证明，对于任意 n 个筹码，其解是作 n* 次移动，而且这是最少的移动次数。

3．使用三种不同颜色的筹码。按通常的方式移动一对对相邻的筹码，使得所有这三种颜色交相辉映。当 $n=3$（共有 9 个筹码），其解需作 5 次移动。在这些变相问题中，假设在最终形成的一排中不允许留有任何空距。如果允许留有空距，则问题的解法就令人惊奇地变为移动 4 次了。

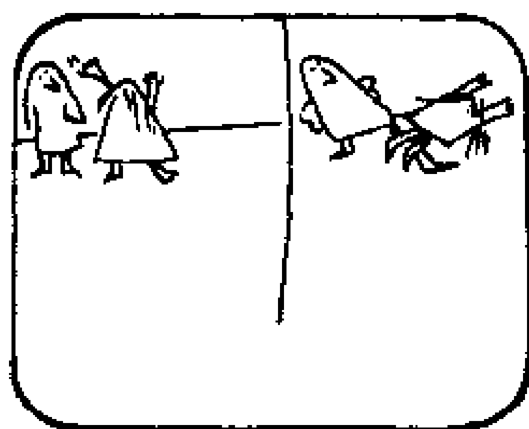
看来尚有许多其它的变化形式，但据我们所知，迄今未曾有人提出，更谈不上解题了。例如，假设一次可以同时移动 3 个或更多相邻的筹码，在上述各变相问题中改用这种移动方式。

假如是先移动 1 个筹码，后移动 2 个相邻的筹码，再 3 个，4 个，依此继续下去，那又会怎样？给定某种颜色的筹码 n 个，另一种颜色的筹码也为 n 个，这个问题的解是否总是作 n 次移动？

---

* 原文为 n^2，似有误——译注

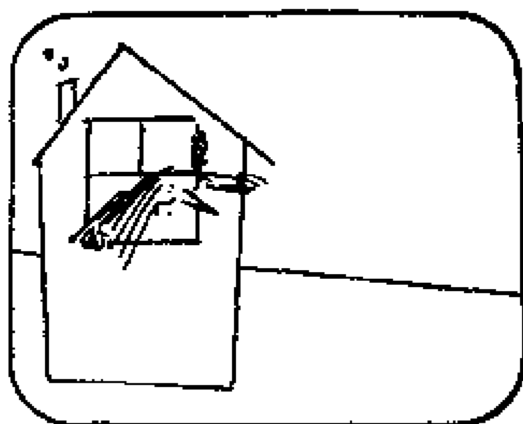
令人困窘的道路



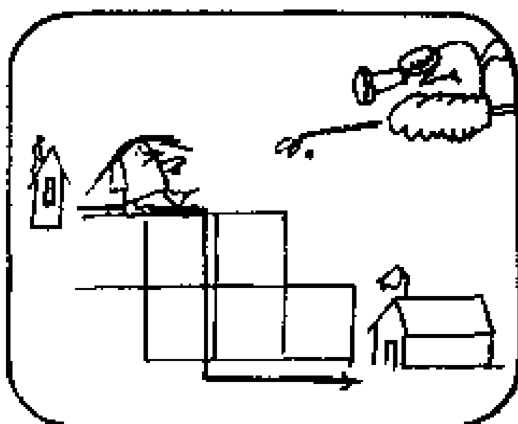
苏珊很是为难。她步行去学校，路上老是碰到斯廷基。

斯廷基：嗐，苏珊，我可以陪你一起走吗？

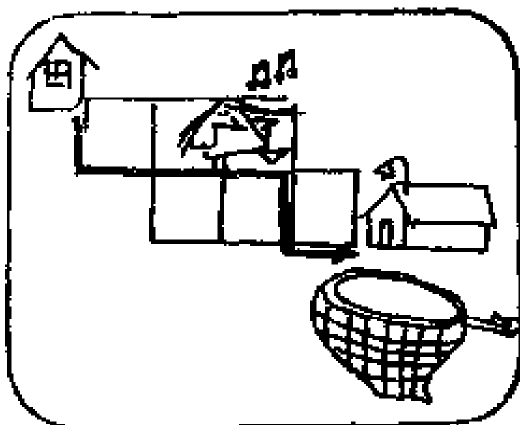
苏珊：不，请走开。



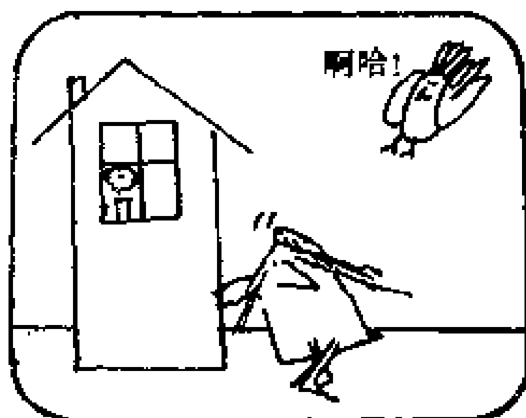
苏珊：我有办法了。每天早上我走不同的路线去学校。这样，斯廷基就不知在哪儿找到我了。



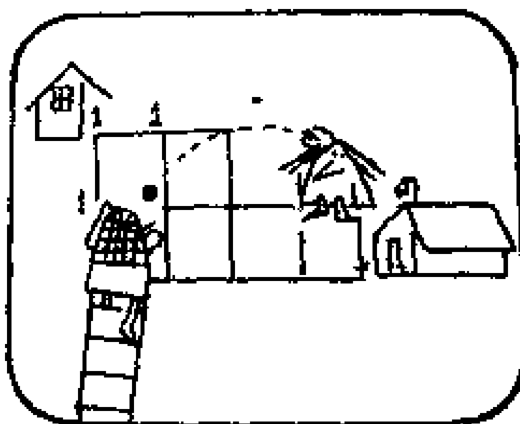
这张地图表示苏珊的住所和学校之间的所有街道。苏珊去学校时，走路的方向总是朝东或者朝南。



这是苏珊走的另一条路线。自然她不想偏离学校的方向走路。但总共有多少条路线可行?

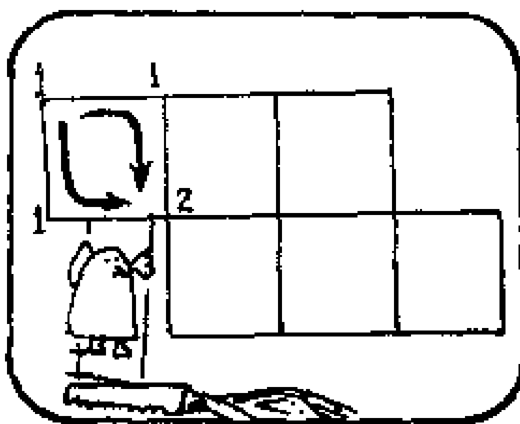


苏珊：我真想知道有多少条路线可走。让我想一下。要算出多少条路线看来并不简单。嗯，啊哈！一点不难，简单得很！苏珊想到了什么好主意？



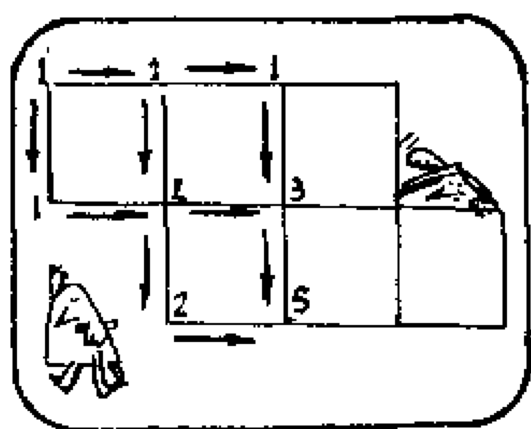
她的推理如下：

苏珊：在我家这个角点上写一个1，因为我只能从这一点出发。然后在与此相隔一个街区的两个角点上各写一个1，因为到达那里只有一条途径。



苏珊：现在我在这个角点上写一个2，因为到达那里可以有两条途径。

苏珊发现2是1加1之和，她忽然领悟：若到某一角点仅一条途径，则该角点上的数字为前一个角点上的数字；若有两条途径，则为前两个角点上的数字之和。



苏珊：瞧！又有四个角点标了号。我马上把其余的角点都标上数字。

请你替苏珊把剩下的角点都标上数字，并告诉她步行到学校共有多少条不同的路线。

多少条路线？

剩下的五个点，自上而下，从左至右分别标以1、4、9、4、13。最后一点上的13表示苏珊去学校共有十三条最短路线。

苏珊所发现的是一种快而简单的算法，用来计算从她家到学校的最短路线共有多少条。要是她把这些路线全画出来，然后计数，这样肯定十分麻烦。若街道布局包含有大量的格子，这样画根本就行不通。你不妨把这十三条路线都画出来，这样你就更能体会到上面这种算法是多么有效。

你对这种算法是否已经理解，可以再画一些不同的街道网络，然后用这种算法来确定从任意点 A 至另一任意点 B 的最短路线共有多少条。图1表示这种类型的四个问题。也可以用其它方法（例如组合公式）求解，但这些方法十分复杂，需要较高的技巧。

在国际象棋棋盘上，“战车”从棋盘的一角到对角线上另一角的最短路线共有多少条？如苏珊给街道交点标号那样，把棋盘上所有格子也都标上数字，于是问题就迎刃而解了。“战车”只能作直线（横向和纵向）移动，所以只要确保棋子每走一步始终沿着右上方向朝另一角的目标移动，便可以求出共有多少条最短路线。如图2所示，把整个棋盘正确标号，根据所标的数字，一眼就可看出在棋盘上从某角出发到任意一角，有多少条最短

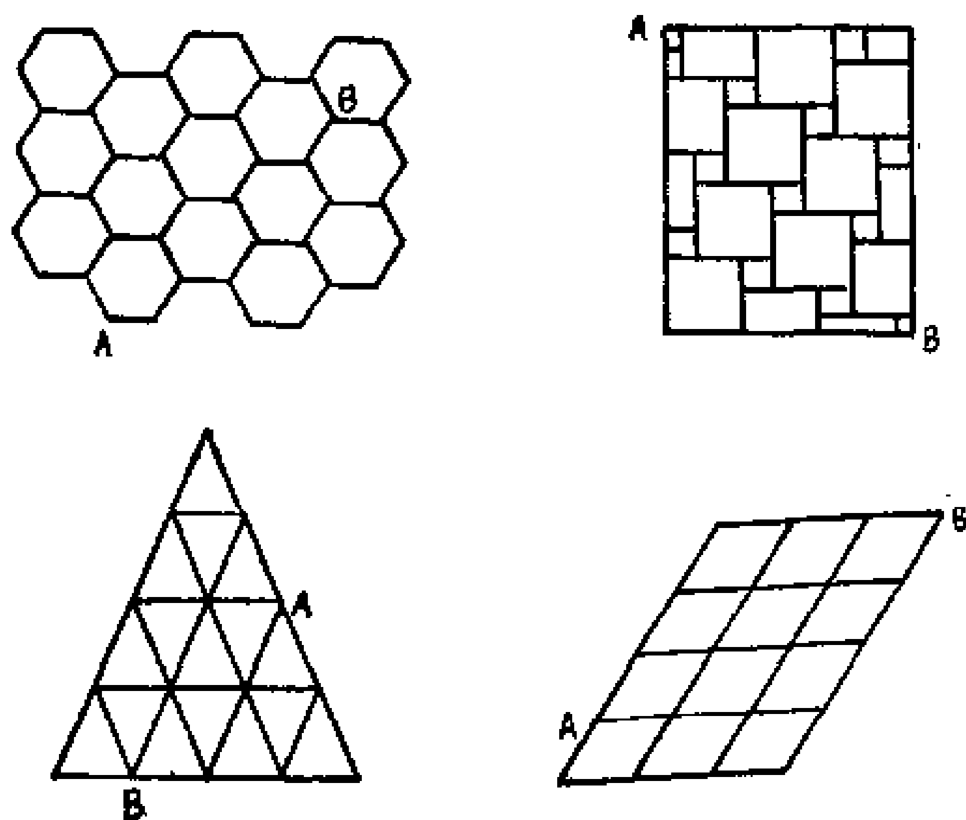


图 1

1	8	36	120	330	792	1716	3432
1	7	28	84	210	462	924	1716
1	6	21	56	126	252	462	792
1	5	15	35	70	126	210	330
1	4	10	20	35	56	84	120
1	3	6	10	15	21	28	36
1	2	3	4	5	6	7	8
	1	1	1	1	1	1	1

图 2

路线。右上角的数字是3,432，所以“战车”从一角到对角线上另一角的最短路线共有3,423条。

让我们把棋盘沿对角线一截为二，使其成为图3所示的三角形。底格上的数字表示从顶格至底部每格的最短路线共有多少条。此三角形上的标号与著名的帕斯卡数字三角形上的数字相同，当然，计算自顶向下的最短路线条数的算法，恰恰是构造帕斯卡三角形所依据的过程。这种同构现象使得帕斯卡三角形成为无数有趣特性的不竭之源。

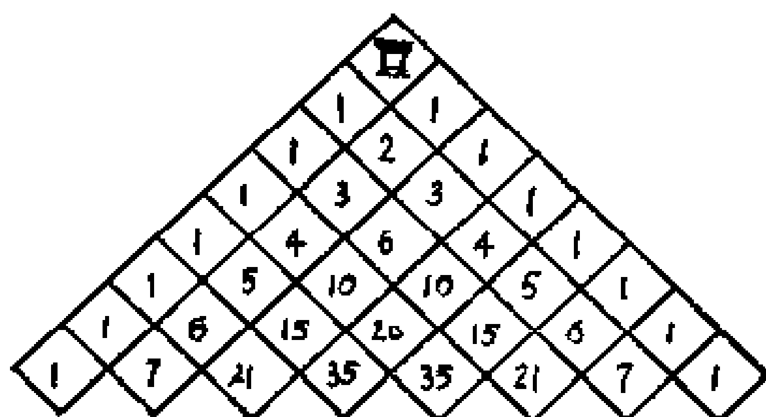


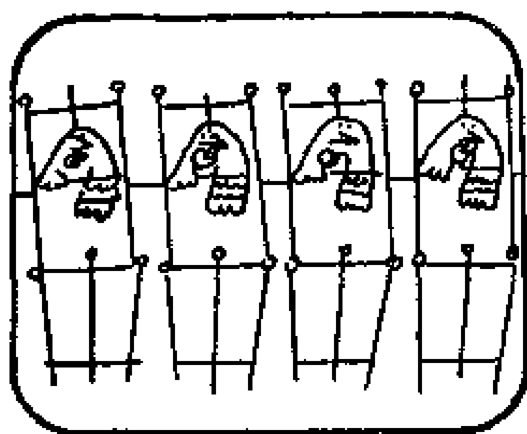
图 3

利用帕斯卡三角形立即可以求出二项式展开的系数，即求$(a+b)$的任意次幂，同样也可用来解出初等概率论中的许多问题。请注意：图3中自三角形顶格至底部各格的最短路线的条数，就边缘一格来说是1，随着向中间移动，数字逐次增加。也许你见过根据帕斯卡三角形所制成的一种装置：在一块倾斜的板上，成百个小球滚过木钉进入各列的底部。全部小球呈一条钟形的二项式分布曲线，因为到达每个底孔的最短路线的条数就是二项式展开的系数。

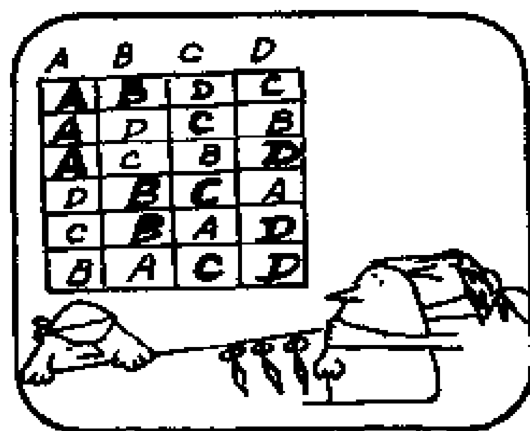
显然，苏珊的算法同样适用于由矩阵格子组成的三维结构。设有一个边长为3的立方体，分成27个立方体单元，把它看作棋盘，处于某一角格上的“战车”可以向三个坐标上的任何位置

作直线移动，试问“战车”到空间对角线的另一角格有多少条最短路线？

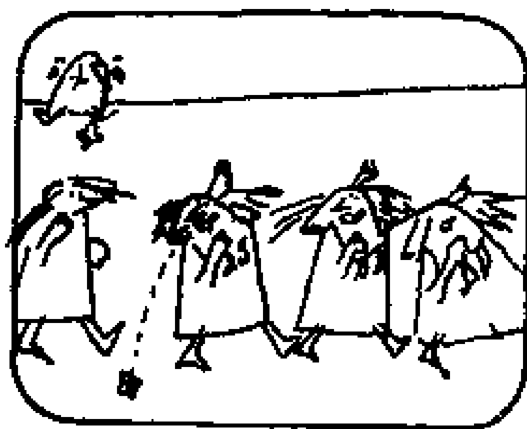
搞错了的婴儿



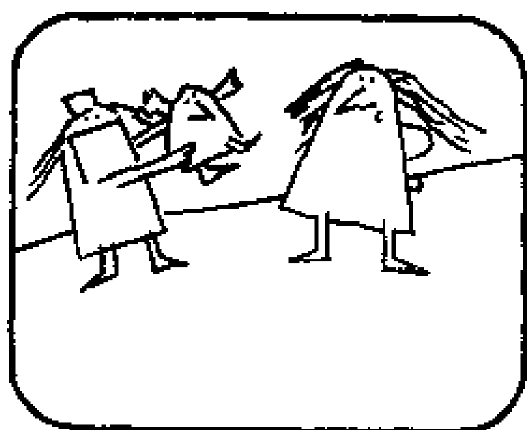
在某医院，四个婴儿的身份标签被搞乱了。两个婴儿的标签不错，其他两个婴儿的标签弄错了。发生这种错误的情况有多少种？



一种简单的计算方法是把所有可能的情况列成一张表，其结果表明两个婴儿与其标签不符的情况共有六种。



现在假设标签搞乱后，恰有三个是正确的，只有一个搞错了，问这个问题有多少种不同情况？



你是否用列表的方法求解？
还是凭灵机一动想出来的？

搞乱了的标签

这个问题许多人都茫然不解，其原因是他们作了下列错误的假设：在四个婴儿中，三个婴儿与其标签相符的情况有许多种。但你如用“鸽笼原理”思索一下，情况就一清二楚了。假设有四个鸽笼，一一标有应放物品的名称。若三样物品都放在适当的鸽笼内，那么第四件物品只有一处可放，自然该处即为存放那件物品的地方。正确的可能只有一种，即所有四样物品都放置恰当这样一种情况，而不可能有更多的情况。

有一个关于三样东西都标签错误的古典问题。一旦领悟到可以把情况的数目缩小为1，这问题也就迎刃而解了。设在桌上有三个盖着盖子的盒子，其中一个盒内有两枚伍分镍币，一个盒内有两枚壹角银币，还有一个盒内有一枚伍分镍币和一枚壹角银币。三个盒上分别标有10分、15分、20分。但每个标签都标错了。某人用手伸进那只误标有15分的盒子，取出一枚硬币放在此盒前方的桌面上。你看到这枚硬币后能否说出每个盒内的硬币？

同上面一样，人们一般总是首先考虑有多少种不同的可能性，但你如洞悉底蕴，一眼就可看出只可能有一种情况，从误标为15分的盒内取出的硬币不是一枚镍币就是一枚银币。若是一枚镍币，你即明白：那盒内原有两枚镍币；若是一枚银币，你即

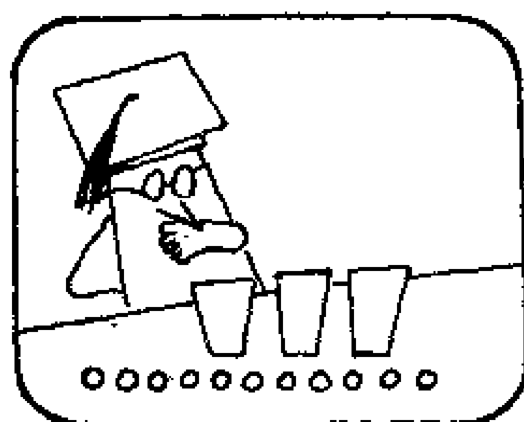
明白：那盒内原有两枚银币。无论哪一种情况，其它两个盒内装的是什么硬币也就随之一清二楚了。欲知什么原因，可画一张六种可能情况的表。可以看出，三个盒子全部误标的情况只可能有两种。从标有15分的盒内取出一枚硬币试看一下就可排除一种情况，仅剩下唯一正确的情况。

有时，上述问题也会以稍复杂的形式出现。在三个盒中，从任意一个盒内取出最少量的硬币进行试看，以此来确定三个盒内各装有什么硬币。唯一的办法当然是从标有15分的盒内取一枚硬币试看。也许你能提出一些更加复杂的问题，诸如每个盒内东西不止两件，或者盒子不止三个等等。

其它许多发人深思的难题都与上面婴儿问题有关，同样也涉及到初等概率论。例如，假设婴儿的标签以随机方式搞乱，那么四个标签全部正确的概率是多少？全部不正确的概率是多少？至少有一个正确的概率是多少？恰有一个正确的概率是多少？至少有两个正确的概率是多少？恰有两个正确的概率是多少？最多有两个正确的概率又是多少？诸如此类，不一而足。

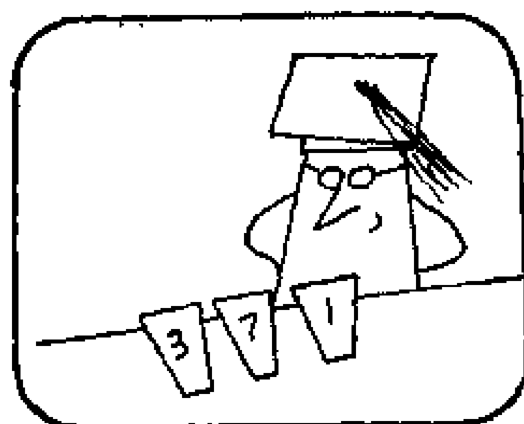
“至少一个”的问题，就一般形式来说，属于古典趣味数学著作中的问题。这个问题通常如下所述：在一家旅店，有几个人在检查自己的帽子。寄帽部的粗心女郎没能使寄存牌和帽子做到一一对应，她随便地把寄存牌发了出去，问至少一人取回自己帽子的概率是多少？结果发现，当n增大时，其概率迅速趋近极限$1-(1/e)$，或比1/2稍好一点，其中e为著名的欧勒常数，等于2.71828…，在概率问题中经常反复出现。

奎贝尔的塑料杯

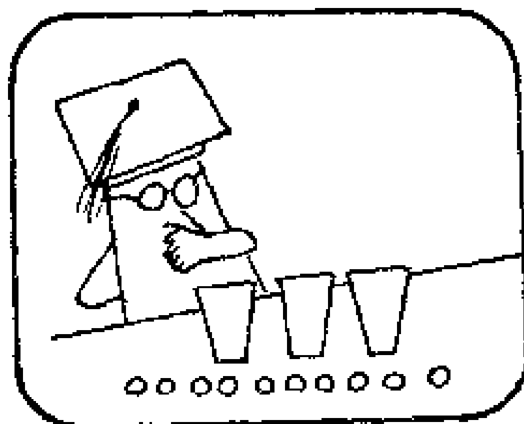


奎贝尔教授出了个难题。

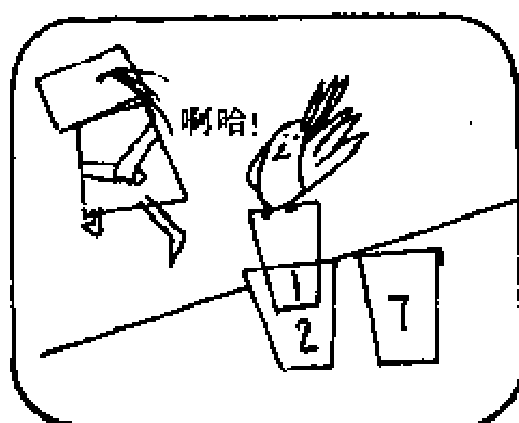
奎贝尔教授：取三只喝咖啡用的泡沫塑料空杯，把十一枚硬币分别投入杯中，要求每只杯中硬币都成奇数。



奎贝尔教授：这不难办到，是吗？方法很多，你可以在一只杯中放入三枚硬币，另一只杯中放入七枚硬币，第三只杯中放入一枚硬币。



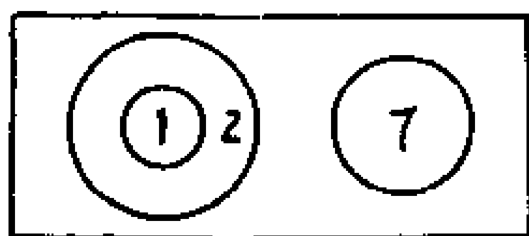
奎贝尔教授：但是，你能否把十枚硬币放入同样这三个杯子之中，使得每只杯中的硬币都是奇数？这也可以办到，但你得动点脑筋才行。



奎贝尔教授：但愿你还没有泄气。你只要想到把一只杯子套入另一只杯子之中，这时很容易做到使每只杯中的硬币都成奇数。

奎贝尔的子集

啊哈！一旦悟到杯中套杯，同一集合的硬币可属于不止一只杯子，这个棘手的问题也就迎刃而解了。用集合论术语来说，我们的解是7个元素的集合和3个元素的集合，第二个集合又包含1个元素的子集。此解可以用图表示如下：



试求所有其余的解亦很有趣。要得到十个解并不困难，上述解法即为其中之一。但若欲发现此外的五个解，或者说十五个全部的解，却还需要花费一番精力。

求出十五个解后，可把硬币和杯子的数目，以及对于每只杯中放入硬币数的要求作些改变，从而产生一些新的问题。

领悟到一个集合的部分或全部可以包含在另一个集合之中，从而可以作两次计算，这是解许多著名难题和悖论问题的钥匙。下面是一个趣味问题。

一个男孩逃学已达数周，学校考勤人员找到了他。小孩开始向他解释为何没有时间上学：

“我每天睡 8 小时，8×365 总共 2,920 小时。一天有 24 小时，所以 2,920/24 即 122 天。

“星期六和星期日不用上学。一年总共约有 104 天。

“我们还有 60 天暑假。

“我一天吃饭需花 3 小时——一年就要 3×365，共 1,095 小时，或 1,095/24 即 45 天左右。

“我每天还需要 2 小时的课外活动。算起来一年也要有 2×365，共 730 小时，或 730/24 即 30 天左右。”

小孩把所有这些数相加如下：

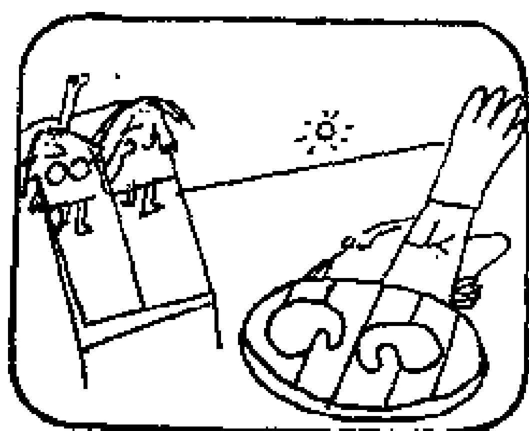
睡眠	122
周末	104
暑假	60
用餐	45
课外活动	30
	361

总共 361 天。

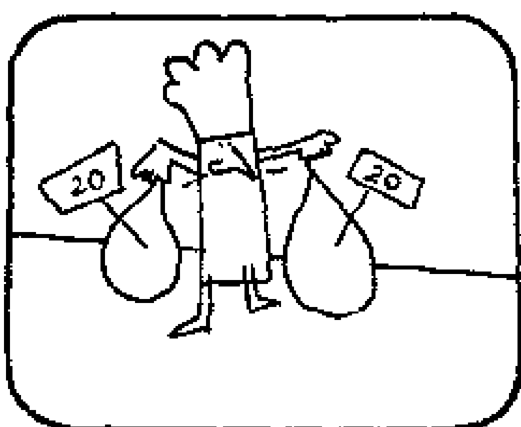
“你瞧，”小孩说，“仅剩下 4 天用作病假，我还没有把学校每年应放的节假日算进去呢！”

考勤人员听后对小孩的数字研究了半天，看不出有什么破绽。请你的朋友们试试这个悖论问题，看有多少人能够指出其谬误所在，即把子集不止一次地算进去。这孩子所说的各项就象是奎贝尔杯中套杯的硬币一样重复地作了相加。

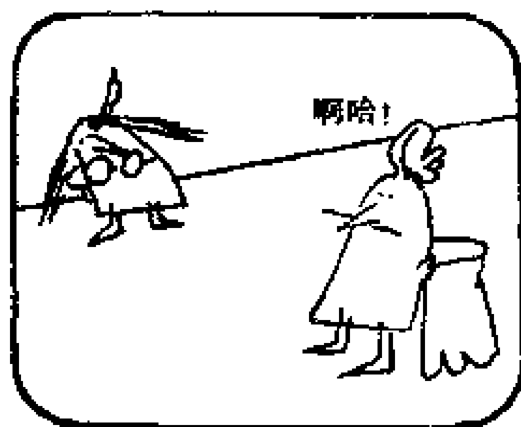
炙肉片策略



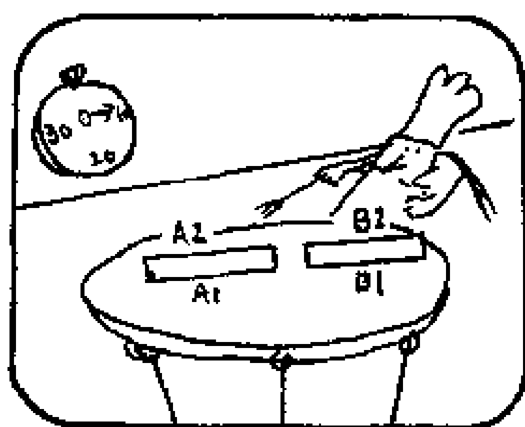
约翰逊先生在户外有个炙肉架，正好能容纳2片炙肉。他的妻子和女儿贝特西都饥肠辘辘，急不可耐。问怎样才能在最短时间内炙完三片肉。



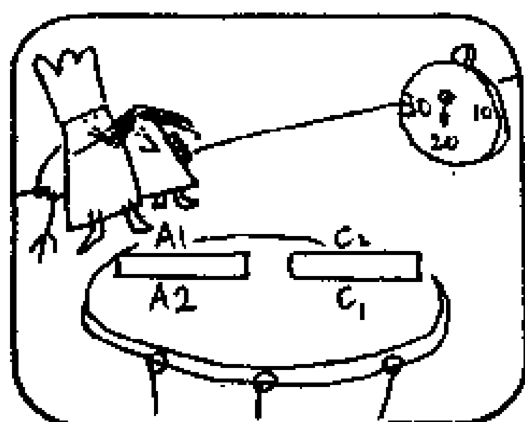
约翰逊先生：瞧，炙一片肉的两面需要20分钟，因为每一面需炙10分钟。我可以同时炙两片，所以花20分钟就可以炙完两片。再花20分钟炙第三片，全部炙烤需40分钟。



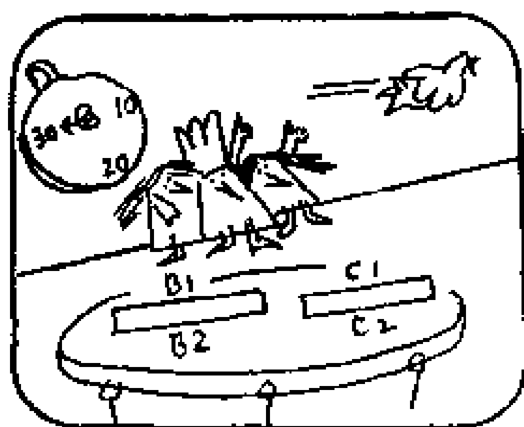
贝特西：你可以更快一些，爸爸。我刚算出你可以节省10分钟。啊哈！贝特西小姐想出了什么妙主意。



为了说明贝特西的解法，设肉片为 A, B, C，每片肉的两面分别记为1，2。第一个10分钟炙烤 $A1$ 和 $B1$。



现在把肉片放置一旁。再花10分钟炙烤 $A2$ 和 $C1$。此时肉片 A 可以炙完。



再花10分钟炙烤 $B2$ 和 $C2$。仅花30分钟就炙完了三片肉，对吗？

一种普通的策略

这个简单的组合问题，属于现代数学中称之为运筹学的分支。这门学科奇妙地向我们揭示了一个事实：如果面临有一系列操作，并希望在最短时间内完成，统筹安排这些操作的最佳方法并非马上就能一眼看出。初看是最佳的方法，实际上大有改进的余地。在上述问题中，关键在于炙完肉片的第一面后并不

一定马上去炙其反面。

提出诸如此类的简单问题，可以采用多种方式。例如，你可以改变炙肉架所能容纳肉片的数目，或改变待炙肉片的数目，或两者都加以改变。另一种生成问题的方式是考虑物体不止有两面，且需要以某种方式把所有的面都予以“完成”。例如，某人接到一项任务，把 n 个立方体的每一面都涂上红色，但每个步骤只能做到把 k 个立方体的顶面涂色。

今天，运筹学用于解决事务处理、工业、军事战略等许多领域的实际问题。即使象炙肉片这样简单的问题也是有意义的。为了说明这一点，请考虑下列一些变相的问题：

琼斯先生和夫人有三件家务事要做。

1．用真空吸尘器清洁一层楼。只有一个真空吸尘器，需时30分钟。

2．用割草机修整草地。只有一个割草机，需时30分钟。

3．喂婴儿入睡，需时30分钟。

他们应该怎样安排这些家务，以求在最短时间内全部完成呢？你看出这个问题与炙肉片问题是同构的吗？假设琼斯先生和夫人同时进行操作，一般人开始往往以为做完这些家务需要60分钟。但如果一件家务(譬如说用真空吸尘器做清洁工作)分为二个阶段，第二阶段延后进行(象炙肉片问题那样)，那么三件家务可在3/4的时间即45分钟内完成。

下面有一个关于准备三片热涂奶油的烤面包问题。这个运筹学问题比较困难。烤面包架是老式的，两边各有一扇翼门，可同时容纳两片面包，但只能单面烘烤。如要烤双面，需打开翼门，把面包片翻过身来。

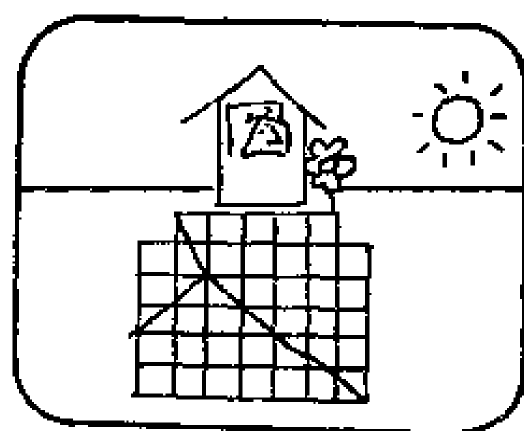
将一片面包放入烤面包架需时3秒钟，取出来也需要3秒钟，将面包片在烤面包器内翻身又需要3秒钟。这些都是双手操作，即不能同时进行放、取或把两片面包一起翻身，也不能在

放入一片面包、将其翻身或取出的同时把另一片涂上奶油。单面烘烤一片面包需要30秒钟，把一片面包涂上奶油需要12秒钟。

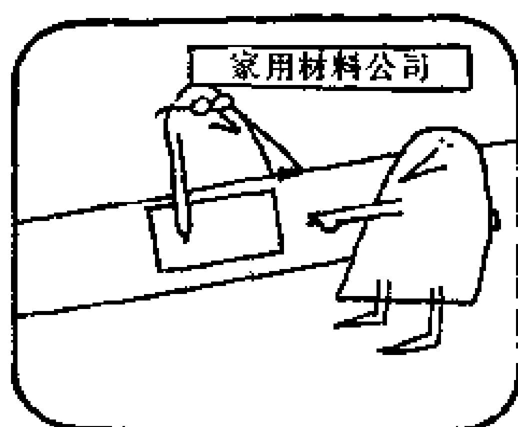
每片面包仅限于单面涂上奶油。未经烘烤不得事先在任何一面涂上奶油。单面已烤过和涂上奶油的面包片可以重新放入烤面包器内以烤其另一面。若烤面包器一开始就是热的，试问双面烘烤三片面包并涂上奶油最少需用多少时间。

在2分钟内完成这件任务并不太难。然而，如果你领悟到：一片面包在单面烘烤尚未结束时也可取出，以后再放回烤面包器内继续烘烤这一面，那么全部烘烤时间可缩短至111秒。即使你想到这点，统筹安排这些操作使效率达到最高也远非是一件易事。在这方面，尚有无数比此更为复杂的实际问题，需借助于与计算机和现代图论有关的高度复杂的数学手段。

难铺的瓷砖



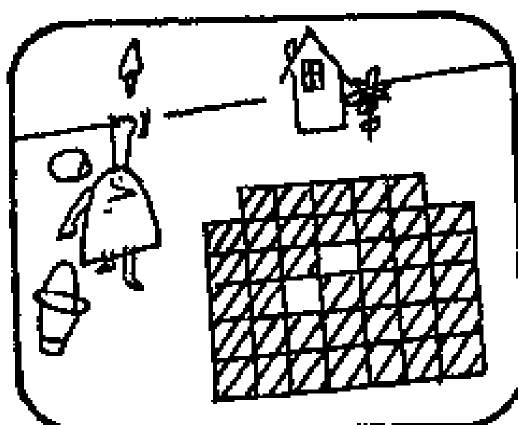
布朗先生的院子里铺有40块四方瓷砖。这些瓷砖已经破损老化，他想予以更新。



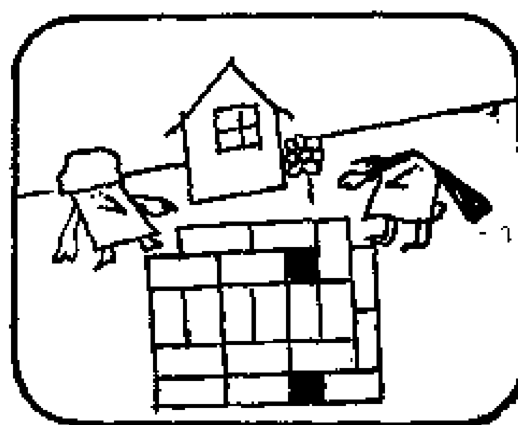
他为修整院子选购新的瓷砖。可惜，目前商店只供应长方形瓷砖，每块大小等于原先的两块。

店主：布朗先生，您要几块？

布朗先生：唔，我要更换40块方瓷砖，所以我估计需要20块。

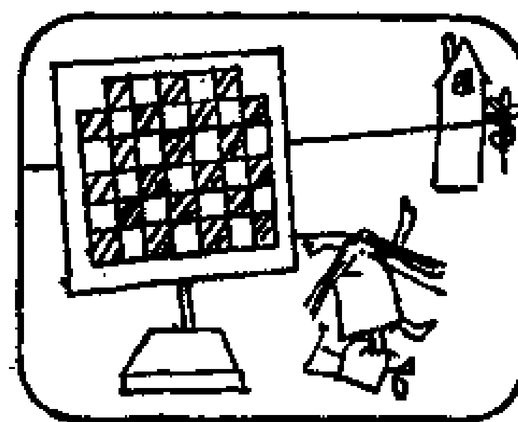


布朗先生试着用刚买的新瓷砖铺院子，结果弄得烦闷不堪。不论他怎么努力，总是无法铺好。

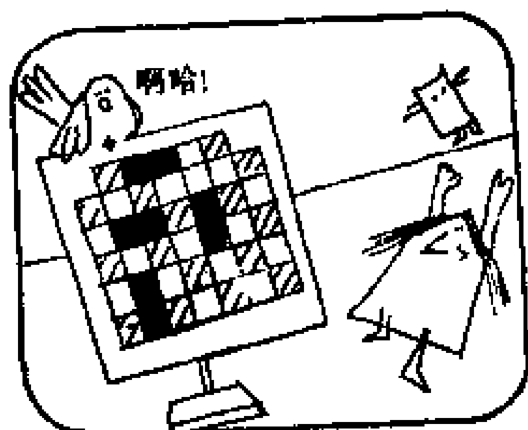


贝特西：出了什么问题，爸爸？

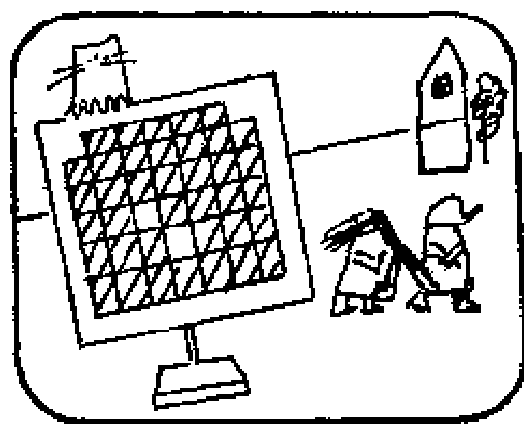
布朗先生：这些该死的瓷砖，真叫人恼火。最后总剩下两个方格没法铺上瓷砖。



布朗先生的女儿画了一张院子的平面图，并涂上颜色，看上去好似一张棋盘。然后她沉思了几分钟。



贝特西：啊哈！我看出症结所在了。请设想每块长方形瓷砖必定覆盖一个红格和一个白格，问题就清楚了。这里面有何奥妙，你理解贝特西的意思吗？



共有19个白格和21个红格，所以铺上19块瓷砖后，总要剩下2个红格没有铺，而一块长方形瓷砖是无法盖住2个红格的。唯一的办法是把最后一块长方形瓷砖一断为二。

奇偶校验

布朗先生的女儿利用所谓"奇偶校验"解答了铺瓷砖问题。如果两个数都是奇数或都是偶数，则称其具有相同的奇偶性，如果一个数是奇数，另一个是偶数，则称其具有相反的奇偶性。在组合几何中，经常会遇到类似的情况。

在这个问题中，同色的两个格子具有相同的奇偶性，异色的两个格子具有相反的奇偶性。长方形瓷砖显然只能覆盖具有相反奇偶性的一对方格。布朗小姐首先说明，把19块长方形瓷砖在院内铺上后，只有在剩下的两个方格具有相反的奇偶性时，才能把最后一块长方形瓷砖铺上。由于剩下的两个方格具有相同的奇偶性，因此无法铺上最后一块长方形瓷砖。所以用20块长方形瓷砖来铺完院子是行不通的。

数学中许多著名的不可能性的证明都建立在奇偶校验上。

也许你很熟悉欧几里得的著名证明：2的平方根不可能是一个有理数。证明是这样进行的：首先假设此平方根可以表示成一个既约的有理分数，则分子和分母不可能都是偶数，否则它就不是一个既约分数。分子、分母只可能都是奇数或者一个是奇数，另一个是偶数。欧几里得证明接着论证此分数不可能属于上述两种情况，换句话说，分子和分母不可能具有相同的奇偶性或相反的奇偶性。而任何有理分数是两者必居其一，因而反证了2的平方根不可能是一个有理数。

在铺砌理论中，有许多必定要用奇偶校验才能论证其不可能性的问题。上述问题只是个极简单的例子，因为它仅涉及用多米诺骨牌，即简单的、不平凡的波利米诺来铺砌。(一个波利米诺是一些边缘相连的单位正方形的集合。)布朗小姐的不可能性证明适用于符合下列要求的单位方格矩阵：这种矩阵若按棋盘那样涂色后，一种颜色的方格要比另一种颜色的方格至少多一个。

在上述问题中，可以把院子看作缺少两个同色方格的一个6×7矩阵。显然，如果缺少的两个方格同色，20个多米诺骨牌无法覆盖其余的40个方格。一个有趣的并与此有关的问题是：如果缺少两个颜色不同的方格，20个多米诺骨牌是否能覆盖住那缺格的6×7矩阵？虽然奇偶校验没有证明其不可能性，但这并不意味着一定可以覆盖。通过擦去一对异色的方格，可生成所有可能的图形。但若逐一加以研究则不胜其烦，因为各种可能的情况太多，以至无法分析。对于所有的情况来说，是否有一种简单的可能性证明？

有的，此证明既简单又巧妙，为拉尔夫·戈莫里妙手偶得之。他同样也是利用了奇偶原理。假设此6×7矩形有一条波及整个内部的闭合回路，宽度为一格(图4)。假设把闭合回路上任何两个异色方格擦去，于是该闭合回路就一断为二，每一部

分都是由格数成偶数的异色方格组成。显然，这二部分的路总是可以用多米诺骨牌覆盖(把骨牌看作为可以停在弯曲车道上的棚车)。你或许愿意尝试一下，把这个巧妙的证明应用于尺寸、形状与此不同的矩阵，也可考虑擦去不止两个方格的情况。

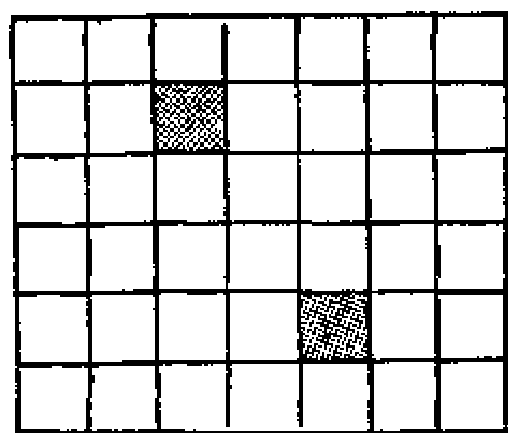


图 4

铺砌理论作为组合几何中的一个范围广泛的领域，越来越受到人们的注目。要铺砌的平面可以是任何形状——“有限的或无限的”，瓷砖也可以形形色色，而且问题可能会涉及不同形状瓷砖的集合，而并非要求单一模式。不可能性证明还经常涉及以某种规定的方式，用两种或两种以上颜色为某一平面着色。

与多米诺骨牌相似的三维物体是砖块，其单位尺寸为 $1\times2\times4$。用这种砖块“堆”成(空间铺砌)一个 $4\times4\times4$ 的箱体并不困难，但用这种砖块可否堆成一个 $6\times6\times6$ 的箱体？这个问题完全可以应用布朗先生院子问题这一解法。设想把该立方体分成 27 个小立方体，每个为 $2\times2\times2$。把这些阶为 2 的立方体交替涂上黑、白两种颜色，好似一个三维的国际象棋棋盘。如果你把每种颜色的单位立方体的个数数一下，就会发现，一种颜色的单位立方体比另一种颜色的多八个。

在那大立方体中，无论怎样放置砖块，不多不少总是恰恰“盖住”相同数目的黑色和白色的单位立方体。但一种颜色的单

位立方体比另一种颜色的多八个，最初的26块砖无论怎样置放，总会剩下同样颜色的八个单位立方体。因此无法安置第27块砖。如果不厌其烦地探讨所有可能的堆砌方式，以求证明这一点，这样做显然极其费事。

砌砖理论仅是三维空间铺砌理论的一部分。关于空间堆砌问题，各种资料文献正日趋增多。它们提出了大量悬而未决、引人入胜的问题，有许多问题的解法可应用于商品的纸箱包装和堆仓等等。

奇偶性在粒子物理学方面也起着很重要的作用。1957年，两名中国血统的美国物理学家*因他们在推翻著名的"宇称守恒定律"方面的贡献而获得诺贝尔奖金。由于这一题目专业性太强，故在此不作详述。但可举一个有趣的硬币戏法的例子来说明奇偶性守恒的一种方式。

往桌上抛一把硬币，数一下正面朝上的有多少，若是偶数，则称正面朝上的硬币具有偶数性；若是奇数，则称其具有奇数性。现在把一对硬币翻身，再翻转第二对，第三对，任你翻转多少对。你将惊奇地发现，无论翻转多少对，正面朝上的硬币的奇偶性始终不变。如果原先是奇数性，那么还是保持奇数性；如果原先是偶数性，则始终保持偶数性。

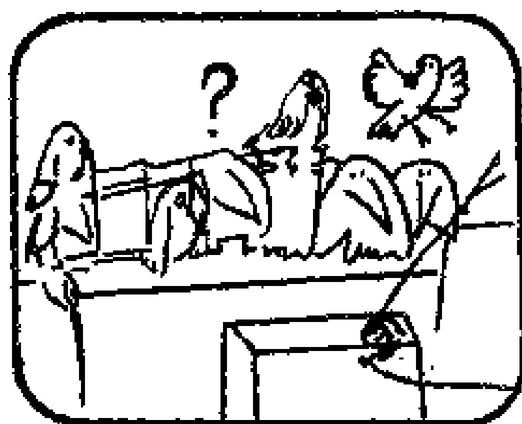
利用这一点可耍一个巧妙的魔术。你背过身去，请人随心所欲地把硬币一对一对地翻转，再请他用手盖住其中任何一枚。然后你回过身去，瞧一瞧硬币，即可正确地说出他手掌下的硬币是正面朝上还是反面朝上。秘诀是开始时数一下正面朝上的硬币有多少，记住是奇数还是偶数。由于一对一对地将硬币翻转并不会影响其原先的奇偶性，所以你只要在最后再把正面朝上的硬币数一下，就可确定被盖住的那枚是正面朝上还是反面朝上。

---

* 指杨振宁和李政道——译注

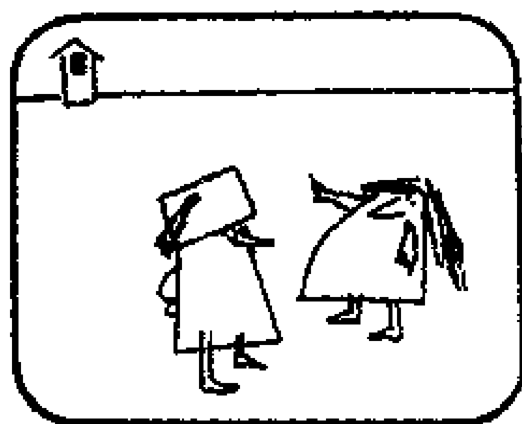
还有一个变相的问题：请他用手盖住两枚硬币，你再说出盖住的那一对硬币其朝上一面是否相同。许多心算扑克牌花样的巧妙魔术都是利用奇偶校验来设计的。

奎贝尔的动物

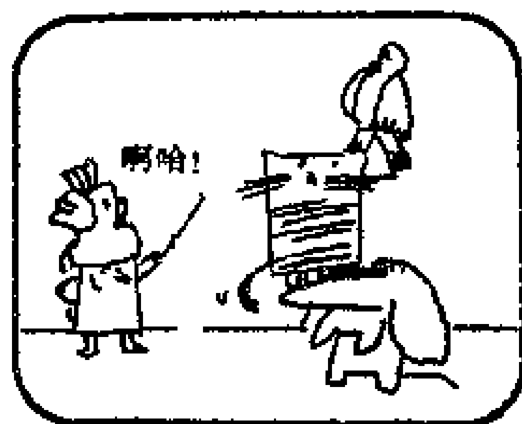


这是久违的奎贝尔教授。

奎贝尔教授：我又为你们想出了一个问题。在我饲养的动物中，除两只以外所有都是狗，除两只以外所有都是猫，除两只以外所有都是鹦鹉，我总共养了多少只动物？



你想出了吗？



奎贝尔教授只养了三只动物：一只狗、一只猫和一只鹦鹉。除两只以外所有都是狗，除两只以外所有都是猫，除两只以外所有都是鹦鹉。

把"所有"看作为1

如果你领悟到"所有"这个词可以指仅仅一只动物的话，头脑中就有了这个问题的答案。最简单的情况——一只狗、一只猫、一只鹦鹉——即是其解。然而，把这个问题用代数形式来表示也是一次很好的练习。

令 x、y、z 分别为狗、猫、鹦鹉的只数，n 为动物的总数，我们可以写出下列四个联立方程：

$$n=x+2$$

$$n=y+2$$

$$n=z+2$$

$$n=x+y+z$$

解此方程组有许多标准的方法。显然，根据前三个方程式，可得出 $x=y=z$。由于 $n=x+2$（由第四个方程），$n=3x$，因此 $x+2=3x$，所以 $x=1$。全部答案可由 x 值求得。

由于动物只数通常是正整数（谁养的猫是用分数来表示只数的？），可以把奎贝尔的动物问题看作所谓丢番图*问题的一个平凡例子。这是一个其方程解必须是整数的代数问题。一个丢番图方程有时无解，有时只有一个解，有时有不止一个或个数有限的解，有时有无穷多个解。下面是一个难度稍大的丢番图问题，同样也与联立方程和三种不同的动物有关。

一头母牛价10元，一头猪价3元，一头羊价五角。一个农夫买了一百头牲口，每种至少买一头，总共花了100元，问每种牲口各买了多少头？

令 x 为母牛的头数，y 为猪的头数，z 为羊的头数，可写出下列两个方程式：

* 丢番图(Diophantos)—刁番都，古希腊数学家——译注

$$10x+3y+z/2=100$$
$$x+y+z=100$$

把第一个方程中的各项都乘以 2 以消去分数，再与第二个方程相减以消去 z，这样得到下列方程式：

$$19x+5y=100$$

x 和 y 可能有哪些整数值？一种解法是把系数最小的项放在方程的左边：$5y=100-19x$，把两边都除以 5 得 $y=(100-19x)/5$；再把 100 和 $19x$ 除以 5，将余数（如果有的话）和除数 5 写成分数的形式，结果是：

$$y=20-3x-4x/5$$

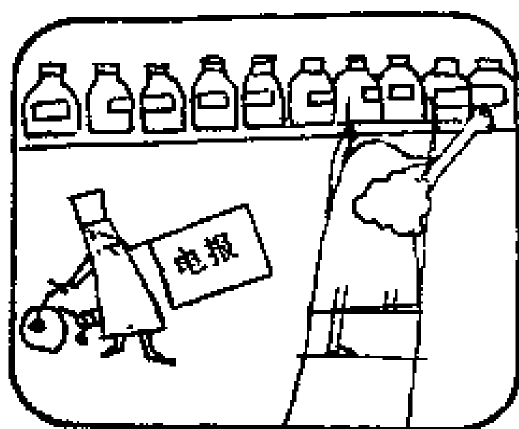
显然，表达式 $4x/5$ 必须是整数，亦即 x 必须是 5 的倍数。5 的最小倍数即是其本身，由此得出 y 值为 1，将 x 和 y 的值代入任何一个原方程，可得 z 等于 94。如果 x 为任何比 5 更大的 5 的倍数，则 y 变成负数。所以，此题仅有一个解：5 头母牛、1 头猪和 94 头羊。你只要把这个问题中牲口的价钱改变一下，便可学到许多关于初等丢番图分析的知识。例如，设母牛价为 4 元，猪为 2 元，羊为三分之一元，一个农夫准备花一百元钱买 100 头牲口，且每种牲口至少买一头，试问他每种牲口可买多少头？关于这一问题，恰有三种解。但如果母牛价 5 元，猪 2 元，羊 50 分呢？那就无解。

丢番图分析是数论中的一大分支，其实际应用范围极广。有一个著名的丢番图问题，以费尔马的最后一个定理*著称：设有方程 $x^n+y^n=z^n$，其中 n 是大于 2 的正整数，问此方程是否有整数解（如果 $n=2$，则称此为毕达哥达斯三元数组，具有自 $3^2+4^2=5^2$ 起始的无穷多个解）？这是一个最著名的悬而未决的数论问题。迄今尚未发现一个解，也未证明其无解。

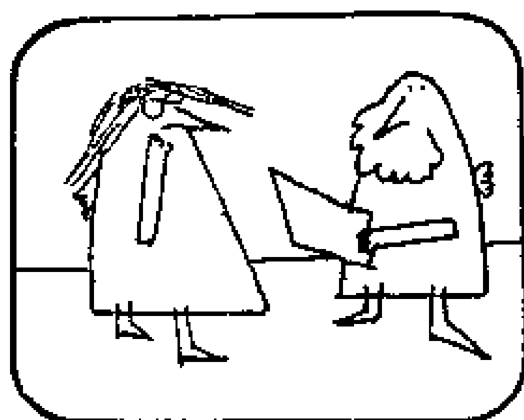
---

* 费尔马（Pierre de Fermat，1601—1665），法国数学家，费尔马的最后一个定理又称为费尔马大定理——译注

药品小混

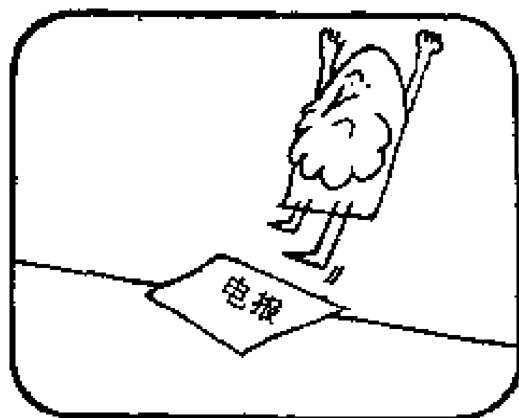


一家药店收到运来的某药品十瓶。每瓶装药丸 1000 粒。药剂师怀特先生刚把药瓶送上架，一封电报接踵而至。



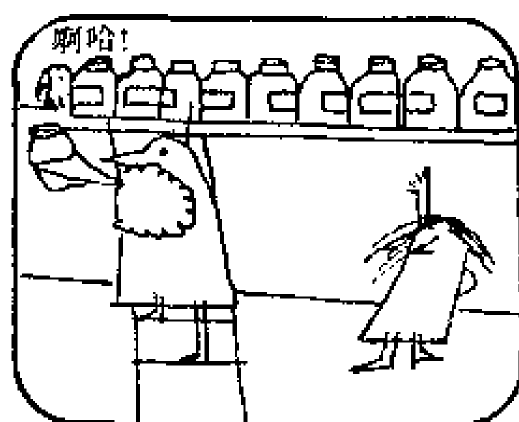
怀特先生把电报念给药店经理布莱克小姐听。

怀特先生：特急！所有瓶药须检查后方能出售。由于失误，其中有一瓶药丸每粒超重 10 毫克。请即退回份量有误的那瓶药。



怀特先生很气恼。

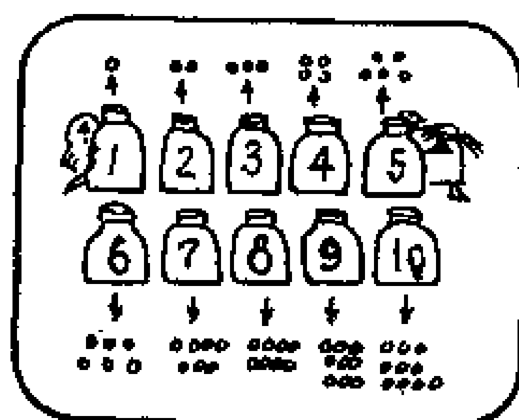
怀特先生：倒霉极了，我只好从每瓶中取出一粒来称一下。真是胡闹。



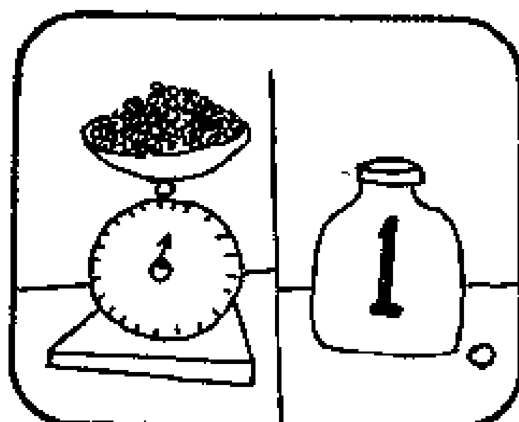
怀特先生刚要动手，布莱克小姐拦住了他。

布莱克小姐：等一下，没有必要秤10次，只需秤一次就够了。

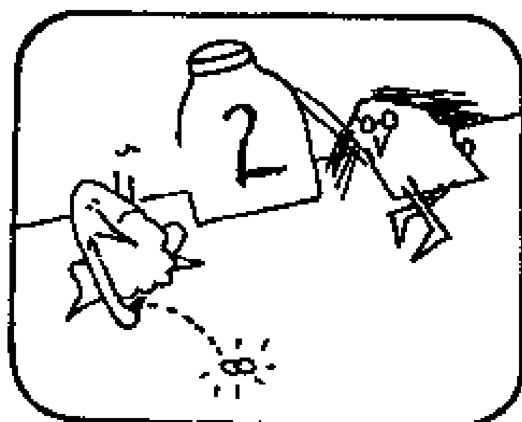
这怎么可能？



布莱克小姐的妙主意是从第一瓶中取出1粒，从第二瓶中取出2粒，从第三瓶中取出3粒，依此类推，直至从第十瓶中取出10粒。

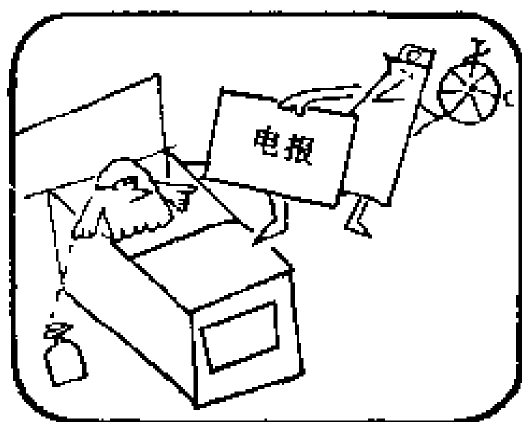


把这55粒药丸放在秤上，记下总重量。如果重5510毫克，也就是超过规格10毫克，她当即明白其中只有1粒是超重的，并且是从第一瓶中取出的。

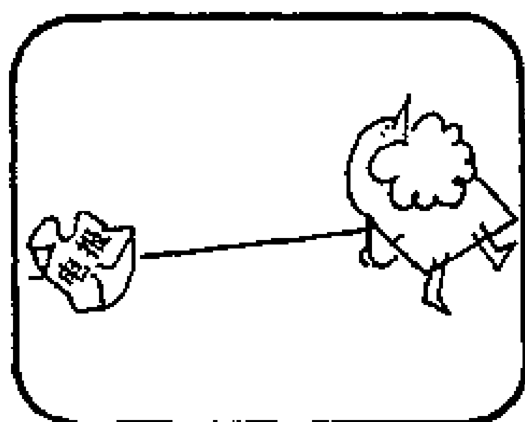


如果总重量超过规格20毫克，则其中有2粒超重，并且是从第二瓶中取出的，依此类推进行判断。所以布莱克小姐只要秤一次，不是吗？

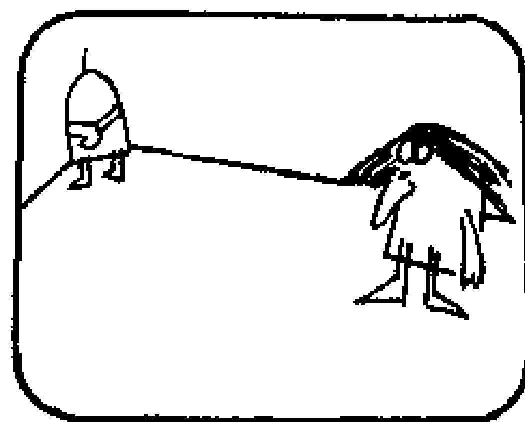
药品大混



六个月后，药店又收到此种药品十瓶。一封电报又接踵而至，指出发生了一个更糟糕的错误。

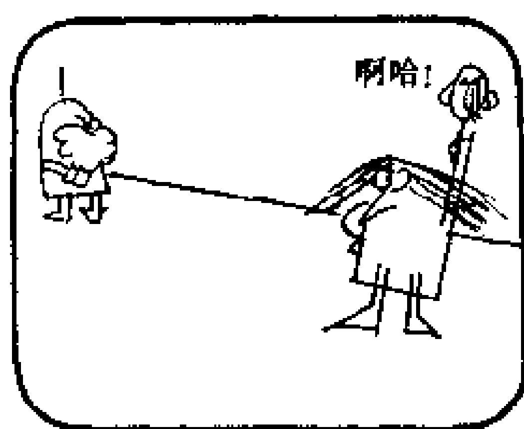


这一次，对超重药丸的瓶数无所奉告。怀特先生气恼极了。



怀特先生：布莱克小姐，怎么办？我们上次的方法不中用了。

布莱克小姐没有立即回答，她在思索这个问题。



布莱克小姐：不错。但如果把那个方法改变一下，我们仍然只需秤一次就把份量有误的瓶药识别出来。这回布莱克小姐又有了什么好主意？

药丸的二则推论

在第一个秤药丸问题中，我们知道只有一瓶药丸超重。从每瓶中取出不同数目的药丸(最简单的方式就是采用计数序列)，我们就可使一组数字和一组瓶药成为一一对应的关系。

为了解第二个问题，我们必须用一个数字序列把每瓶药单独标上某个数字，且此序列中的每个子集必须有一个单独的和。有没有这样的序列？有的，最简单的就是下列二重序列：1，2，4，8，16，…这些数字是2的连续次幂，这一序列为二进制记数法奠定了基础。

在这个问题中，解法就是把瓶药排成一行，从第一瓶中取出1粒，第二瓶中取出2粒，第三瓶中取出4粒，依此类推。取出的药丸放在一起秤一下。假设总重量超重270毫克，由于每粒份量有误的药丸超重10毫克，所以我们把270除以10，得到的27即为超重药丸的粒数。把27写成二进制数：11011。在二—十进制变换$(11011)_2=(27)_{10}$中，“1”的位置显示出2的幂的大小。在11011中自右向左，第一、二、三、四、五位上的“1”表示其权值分别为1、2、8、16。因此份量有误的瓶药是第一、二、四、五瓶。

在由2的幂组成的集合中，每个正整数是单一的不同组合中的各元素之和。鉴于这一事实，二进制记数法极为有用。在计算机科学和大量应用数学领域内，二进制记数法是必不可少

的。在趣味数学方面，同样也有难计其数的应用。

这里有一个简单的扑克魔术，可叫你的朋友莫名其妙。这个戏法也许看上去与瓶药问题毫无关系，但它们的依据相同，都是二进制原理。

请别人把一副牌洗过，然后放进你的口袋，再请人说一个1至15以内的数字。然后你把手插进袋里，一伸手就取出一组牌，其数值相加正好是他所说的数字。

此秘密简单得很。在耍魔术之前，预先取A、2、4、8各一张放入口袋。这副牌缺少区区四张，不大可能为人察觉。洗过的牌放入口袋后，暗中将其排置于原已在袋中的四张牌的后面。请别人说出一个数字，你用心算将此数表示成2的幂之和。如果是10，那你就应想到：8+2=10，随即伸手入袋，取出2和8的牌示众。

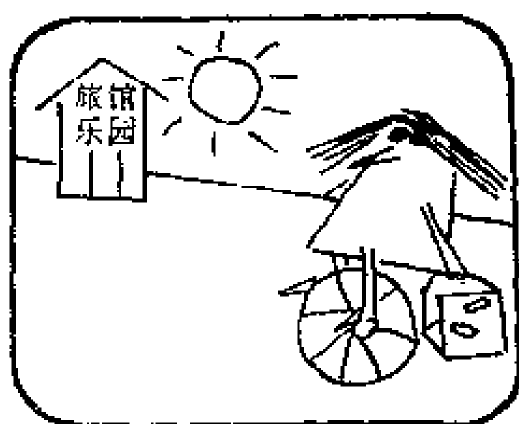
卜算卡片的依据也是二进制原理。在第三章“数字”中，图1表示六张卡片，它们可以用来确定1至63范围内的任意一个数字。请一位观众想好此范围内的一个数字(例如某人的年龄)，然后请他把所有上面有此数字的卡片都交给你。你随即说出他心中所想的那个数字。秘诀就是把每张卡片上作为2的幂的第一个数字相加。例如，如果把卡片C和卡片F交给你，你只要将上面第一个数字4和32相加，便知道别人心中所想的数字是36。

确定每张卡片上的数字集合的规则是这样的：在一个数的二进制表示中，若右起第一位是“1”，则此数字就在卡片A上。该卡片上的数字集合自1起始，全部数字就是1至63范围内所有的奇数；卡片B则包括1至63范围内二进制记数法中右起第二位为“1”的全部数字；卡片C包括二进制记数法中右起第三位为“1”的全部数字；卡片D、E、F依此类推。注意：63这个数的二进制记数法是111111，每一位都是“1”，因此每张卡片上

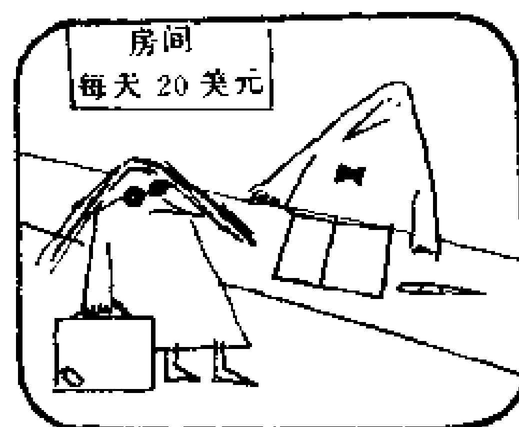
都有这个数字。

有时，魔术师为了使这个戏法显得更加玄妙，故意把每张卡片涂上各种不同的颜色。他只需记住每种颜色所代表的 2 的幂。例如，红卡片代表 1、橙卡片代表 2、黄卡片代表 4、绿卡片代表8、蓝卡片代表 16、紫卡片代表 32(可依彩虹诸色的顺序)。于是，魔术师站在大房间的一头，请人想好一个数字，并把上面有此数字的卡片置于身旁，他即可根据那人身旁卡片的颜色随口说出别人心中所想的数字。

断 金 链



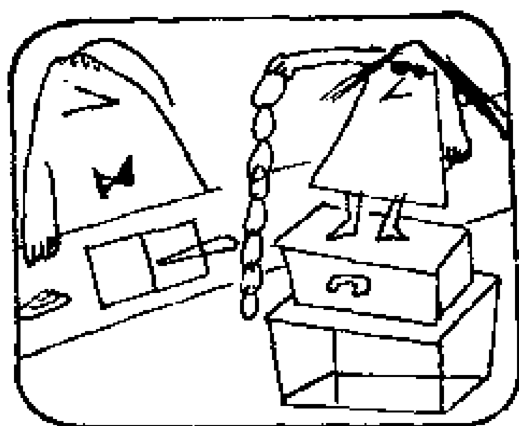
一位来自阿肯色州的年轻太太格洛里亚，正在加利福尼亚州旅行。她想在旅馆租用一个房间，租期一周。



办事员此时正心绪不佳。

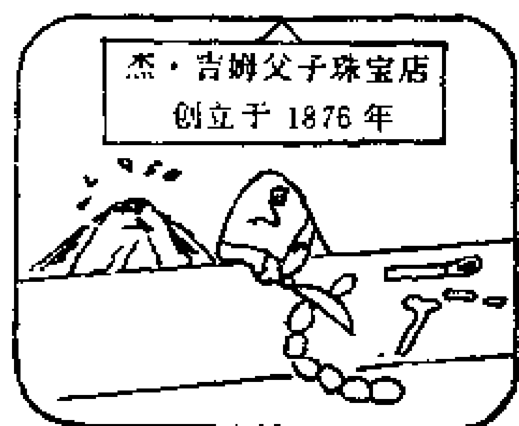
办事员：房费每天 20 元，要付现钱。

格洛里亚：很抱歉，先生，我没带现钱。但我有一根金链，共七节，每节都值 20 元以上。

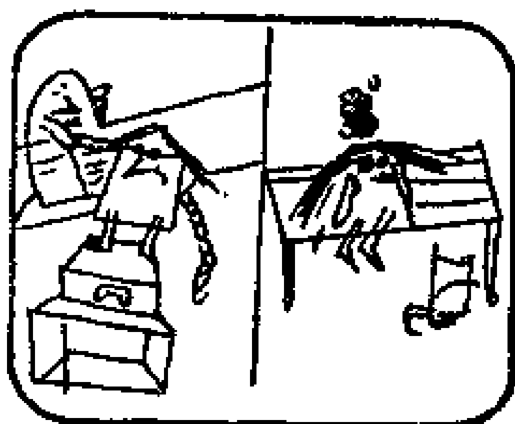


办事员：好吧，把金链给我。

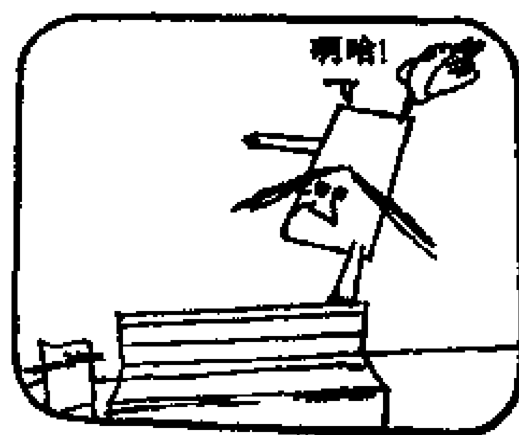
格洛里亚：现在不能给你。我得请珠宝匠把金链割断，每天给你一节，等到周末我有了现钱再把金链赎回。



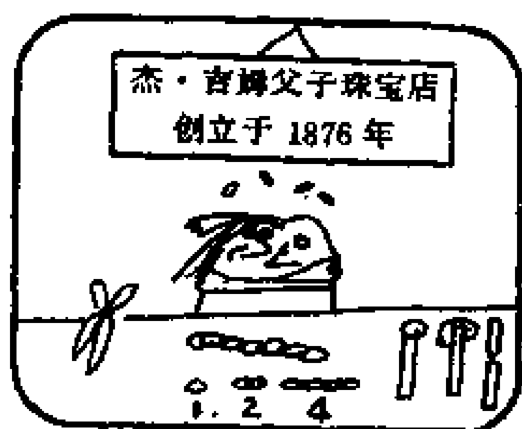
办事员终于同意了，但格洛里亚必须决定如何断金链的方法。



格洛里亚：我该三思而行，因为珠宝匠是按他所切割和以后重新连接的节数来索价的。



格洛里亚想了一会，悟到她不必把每一节都割开，因为她可以把一段段金链换进换出，以这种方式来付房费。当她算出需请珠宝匠割开的节数时，她几乎不能自信。你想一想需割开多少节？



只需割开一节。这节应是从一端数起的第三节。把金链断成1节、2节、4节这样三段后就能以换进换出的方式每天付给办事员一节作为房费。

令人为难的节

啊哈！领悟到下列两点才能解题。第一，至少需有1节、2节、4节这样三段(即其节数成二重级数的一些段)，这样才能以各种不同的组合方式组成1节、2节、3节、4节、5节、6节和7节。我们在上一个问题中已经知道，这就是作为二进制记数法基础的幂级数。

第二，只需割开一节就可把金链分成符合要求的三段。

关于这个问题，若把金链的长度增加，则可想出一些新的问题。例如，假设格洛里亚有一根63节的金链，她想把它割开，以上面那种方式来付63天房费(价格不变)。要达到此种目的只需割开三节。你想出了吗？你能否根据金链的不同长度设计一个通用的解题程序，要求分割开的节数为最少？

有一个有趣的变相问题：若所经手的是 n 节首尾相衔的闭合回路，例如说格洛里亚有一串金项链，由79节相连而成，若每天房费为1节，试问最少需分割开几节才能支付79天房费？

第二章 几　　何

几何学是关于形状的研究。这一定义虽说也对，但由于其范围如此广泛，因而几乎没有什么意义。据说在两点之间，最美的距离是一条曲线。虽然这句话是针对几何学中占有相当份量的曲线讲的，但这一断语与其说属数学领域，不如说是属美学领域。

更确切一些，用对称性这一术语来定义几何学。所谓对称性是指图形的任何不改变其原来形状的变换。例如，字母"H"具有180度旋转对称性。这意味着若把此字母旋转180度——颠倒过来——它仍然是字母"H"。"AHA"这个词具有反射对称性，将它置于镜前，镜中的象与原来的一模一样。

几何学的每一分支都可定义如下：研究特定图形在特定的对称变换下的不变性质。举例来说，欧几里得平面几何是关于图形在平面上移动、旋转、镜面反射、或均匀扩展和收缩时其"不变"性质的研究。仿射几何是研究图形以某种方式"伸缩变换"时的不变性质。射影几何是研究图形在射影对应下的不变性质。拓扑学是研究图形在一对一的双方连续变换下的不变性质，诸如画在橡皮膜上的图形当橡皮膜受到变形时仍然保持不变的性质。

本书中几乎处处涉及到几何学，这一章把在几何方面占主导地位的问题都已汇集在一起，当然，我们选择的仅局限于只需灵机一动便能迎刃而解的问题。第一个难题是关于切分乳酪。它形象地说明：即使最简单的问题，也同时涉及数学中的许多分支。这个问题部分属于平面几何，部分属于立体几何，部分属于

组合，部分属于算术，甚至还引进了代数学的一个重要分支，称为“有限差分演算”。

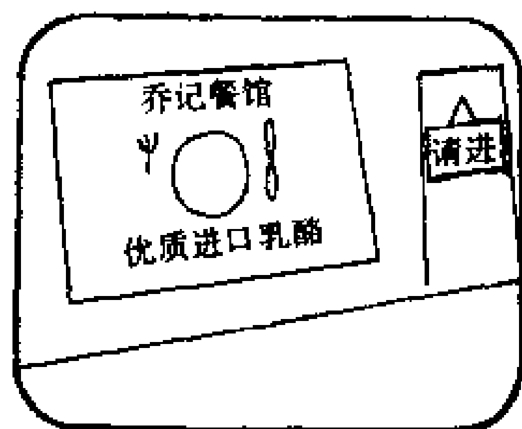
“骑士大调动”是一个拓扑学问题，令人感到有点奇怪。其解法表明：这个问题等同于用任何简单闭合曲线上的若干点来提出的问题，至于闭合曲线是何种形状，那都没有关系，因为它仅仅涉及那种曲线的拓扑性质。我们利用一个圈上的若干点来解题，但同样也可利用一个正方形或一个等边三角形去求解。

本章“令人惊讶的刀”和“航空飞行”使我们暂时离开平面进入三维的欧几里得几何的范畴。飞行员路线问题暗示着一个著名的四只臭虫的路线问题。它表明有时可以采取简单得多的方法从而省去计算。兰塞姆所研究的那些问题使我们又回到平面上来，进入欧几里得几何中属于剖分理论和铺砌理论的领域。铺砌问题是一个组合平面几何的问题。尤卡里特小姐的切割立方体问题是一个组合立体几何的问题。

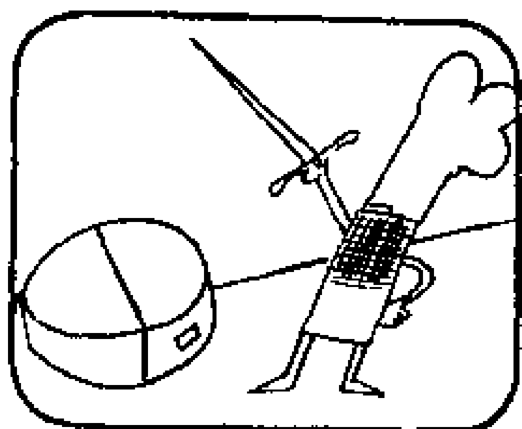
地毯问题以及关于球上开洞的三维问题是两个关于某些定理的生动例子。在那些定理中，一个变量，虽然被认为应具有变量的性质，实际上不管其它参数如何变化，它都保持某个值不变。谁能料到球的体积是一个常数，无需顾及洞的宽度或球的半径。一个数学家初次遇到这个定理时，他(她)几乎总会感到诧异，随即叹之曰：“美哉！”

一个数学家口称“美哉”时，没有人确切知道他(她)指的是什么——这多少带有未曾料到如此简单的味道，然而所有的数学家都很容易识别出一个美的定理，或一个美的定理证明。几何学由于其直观的关系特别富于美的定理和证明。你将会在本章中发现一些很好的例子。

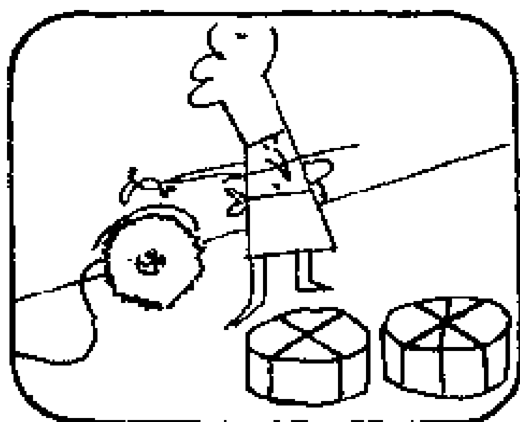
巧分乳酪



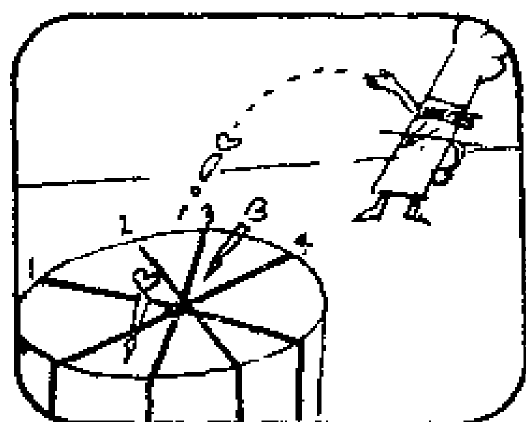
乔记餐馆虽说吃食不算最好，但却以美味乳酪而远近闻名。



块块乳酪状如圆盘，饶有风趣。一刀下去，就把一块乳酪一切为二。

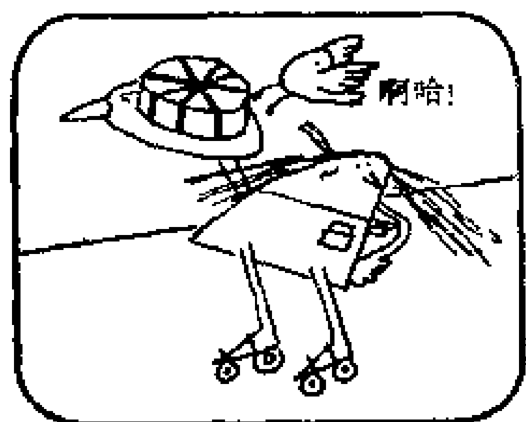


连切两刀，不难将其分成四块，三刀则切成六块。



一天，女招待罗茜请乔把乳酪切成八块。

乔：好，罗茜。很简单，我这样切四刀就成了。



罗茜把切好的乳酪往桌上送时，忽然悟到乔只需三刀便能切成八块。罗茜想出了什么妙计？

直切三刀

罗茜豁然开朗，悟到圆柱形乳酪是一个立体图形，可以在中线处横截一刀将其一切为二。图1表示三刀如何把乳酪切为全等的八块。此解的假设条件是三刀同时切下。如果是连续切法，而且允许移动切开的部分，那么连切三刀也行。可以把第一次切开的两块迭在一起，加第二刀切成四块，再把四块迭在一起，最后一刀切成八块。

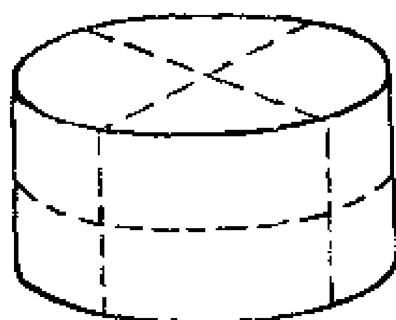


图 1

罗茜的解法是如此简单，几乎可说是平凡的。然而它给人以明确的启示：对于很有意义的切分问题，可用有限差分演算进行研究并用数学归纳法加以证明。有限差分演算是发现数字序列普通项公式的有力工具。今天，数字序列日益引起人们的兴趣，因为它具有极其广泛的实际应用范围，还因为计算机能够以极快的速度执行序列的运算。

罗茜第一次切乳酪的方法是在乳酪顶面的若干中线同时切数刀。乳酪具有如同薄饼那样平坦的顶面。让我们来观察一下，根据在一张薄饼上切以数刀的过程，能够生成一些什么数字序列。假设沿薄饼若干中线同时切数刀，显然，同时切 n 刀至多可以切成 $2n$ 块。

若在其边缘为一条简单闭合曲线的任意平面上同时切下 n 刀，这种方法所切成的块数，是否最多也是表达式 $2n$ 呢？否。如图 2 所示，可随意画出许多既非凸面、且形状各异的平面，即使一刀也可切成你所希望得到的块数。能否画出一种图形，仅切一刀便可切出任何有限数目的全等的块？若能办到，这种图形的周长应具有什么特性，才能确保只需一刀便可切成全等的 n 块？

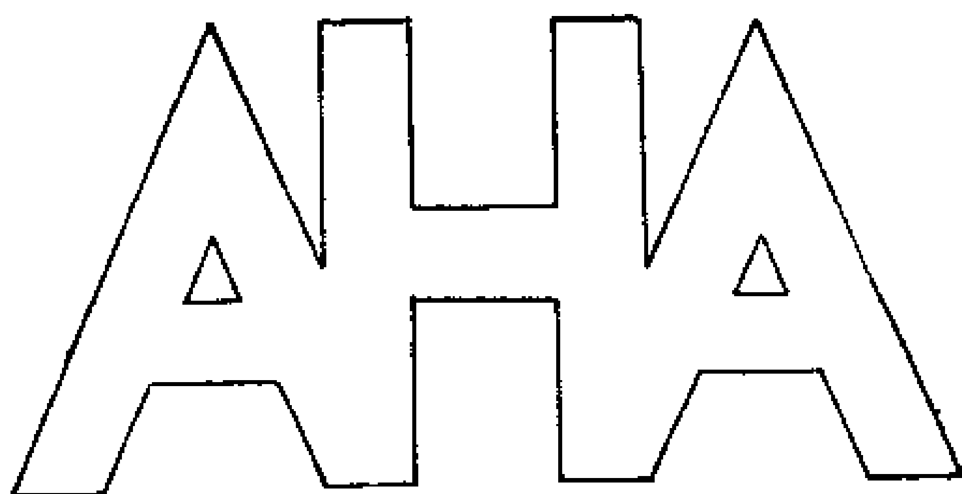


图 2

若不同时进行切分，薄饼的切分将更为有趣。你很快会发

现；仅当 $n \geqslant 3$ 时，切 n 刀方可切成不止 $2n$ 块。这里，我们并不考虑所切成的块是否全等或面积相同。图 3 表示当 $n=1$、2、3、4 时，可以切成的最多块数分别为 2、4、7、11。

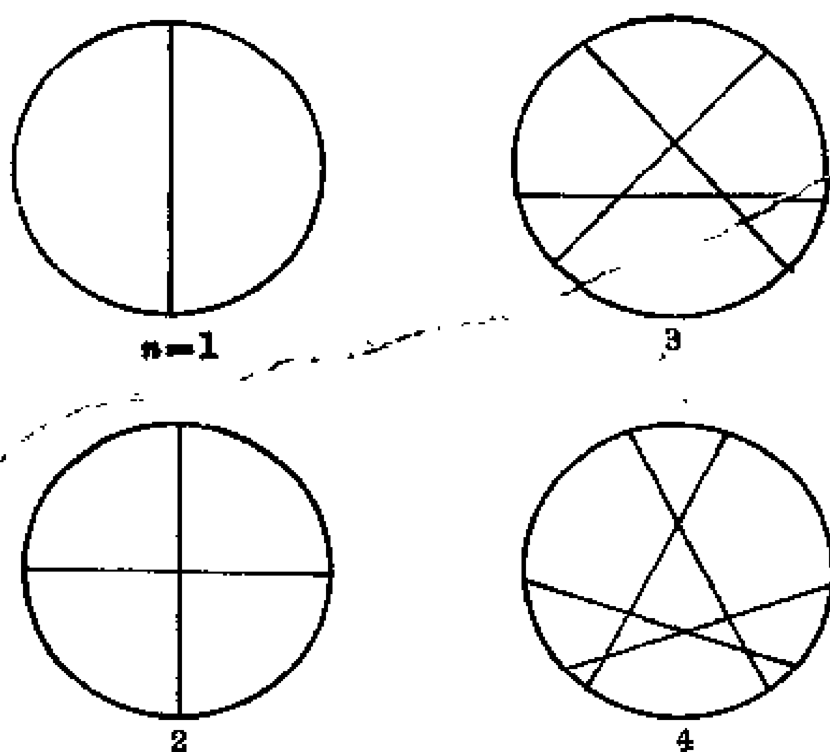


图 3

这一大家所熟悉的序列是根据下列公式求得的：

$$\frac{n(n+1)}{2}+1$$

其中，n 是所切的刀数。此序列的前 10 项（n 自 0 始）是 1, 2, 4, 7, 11, 16, 22, 29, 37, 46, …。请注意，第一行差分是 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, …，第二行差分是 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, …。这强烈地暗示着此序列的普通项是一个二次项。

为什么说"强烈暗示"？因为虽可用有限差分演算找到一个公式，但并不能保证该公式对无限序列亦为有效。这一点尚需作出证明。在薄饼公式这一例子中，不难通过归纳法作出一个简单证明。

从这点出发，你可以发现大量引人入胜的研究方向，其中有

许多将导致非同一般的数字序列、公式以及数学归纳法证明。这里有一些问题可供你作初步尝试。采用下列各种切法，最多可切成几块？

1．在马蹄铁形的薄饼上切 n 刀。

2．在球形或罗茜所切的那种圆柱形乳酪上切 n 刀。

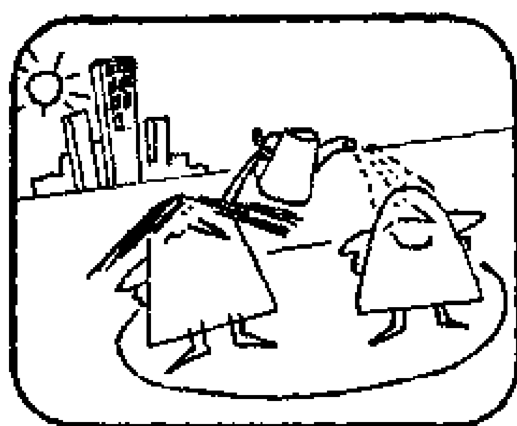
3．用切小圆甜饼的刀在薄饼上切 n 刀。

4．在状如镯环（即中心有一圆孔）的薄饼上切 n 刀。

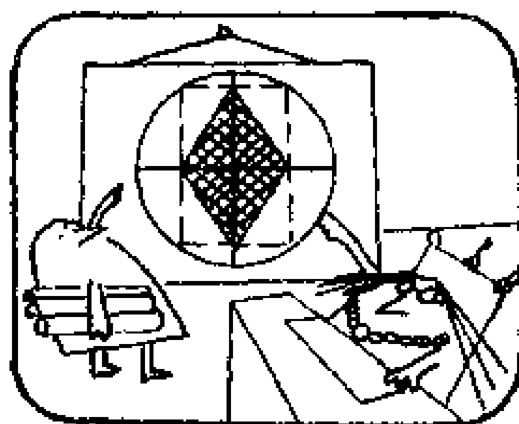
5．在油炸圈（圆环）上切 n 刀。

关于以上这些问题，假设切分是同时进行的，若改为连切方式，并且允许重新安排切开的部分，其答案有何变化？

隐蔽的尺寸

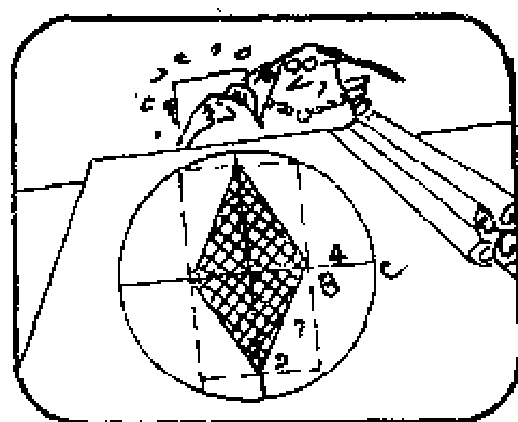


在市广场中央有一片很大的圆形憩息地。市议会拟在该地建造一个菱形浅水池。



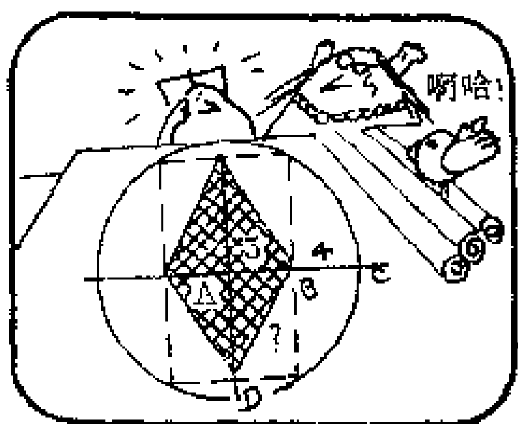
多丽丝·赖特市长看到这一计划，她找来了建筑师：

赖特市长：我喜欢呈菱形的水池，用红瓷砖砌成，不知这水池每边有多长？



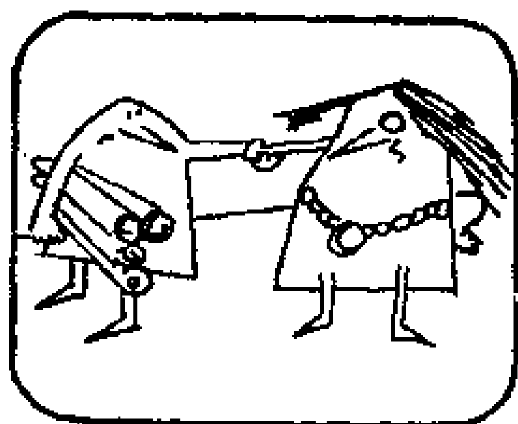
建筑师弗兰克·劳埃德·朗被问住了。

朗先生：让我们考虑一下。从 A 至 B 是 5 米，从 B 至 C 是 4 米。唔，应求出 BD 也许我需应用毕达哥拉斯定理。



朗先生正疑惑不解，市长阁下忽叫起来。

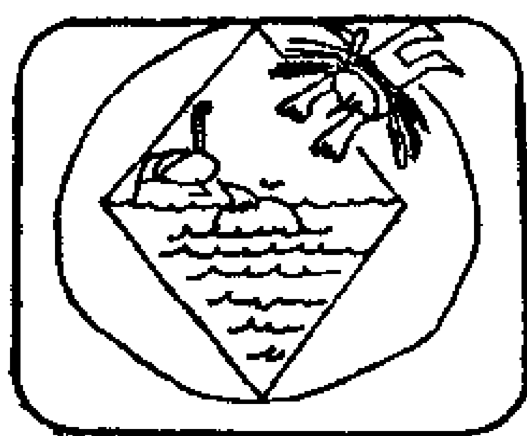
赖特市长：啊哈！水池每边恰是 9 米，这是毫无疑问的。



朗先生：我的天，怪不得你姓赖特，我姓朗*。

---

* 赖特(Wright)一姓与正确的 (right)一词同音；朗 (Wrong)一姓与错误的(wrong)一词同音——译注



有了什么简单的好主意使这个问题迎刃而解？

既是对角线又是半径

赖特夫人忽然悟到水池每边即为矩形的对角线。这个矩形的另一条对角线就是圆形憩息地的半径。而矩形的两条对角线是相等的，所以水池每边边长就是圆半径的长度。半径是$5+4=9$米，因此水池每边也是9米，无需应用毕达哥拉斯定理。

你再找一种更简便的方法试试看，这样你就更能体会我们这种解法的优点。如果你仅应用毕达哥拉斯定理和相似三角形，其解法一定很冗长、繁琐。但你如果想到下列平面几何定理：一圆内两弦相交，一弦的两部分之积等于另一弦两部分之积，那么就可以得出稍为简短的解法。根据这一定理，可以求得直角三角形的高为$\sqrt{56}$，再应用毕达哥拉斯定理，算出直角三角形的斜边为9。

有一个与此密切相关的问题，那就是诗人亨利·朗费罗在其小说《卡瓦诺》中所提出的有名的水仙花难题。当水仙花花茎垂直时，花朵伸出湖面10厘米。如果把水仙花拉向一边，使花茎保持直线，花朵沾水的位置离原先花茎接触湖面的位置为21厘米，问水深多少？

要解这个问题，可以先画一张如图4(见52页)那样的图形。此图与水池问题的图相似。我们要确定的就是x的长度。与水池问题一样，这个问题也不止有一种解法。若你还记得两弦相

交的定理，解这个问题是轻而易举的。

还有一个有趣的游泳池难题，灵机一动则迎刃而解。一条海豚位于一圆形水池西边的 A 点，它笔直游了 12 米，鼻子触到水池边上的 B 点，转身后，又笔直游了 5 米，到达水池边上的 C 点，此位置与水池边上的 A 点正好遥遥相对，试问如果它直接从 A 点游向 C 点，需游多长距离？

啊哈！要解这个问题只需知道下列定理：半圆的内接角都是直角，所以角 ABC 是一个直角。在上例中，已知此直角三角形的两边为 5 和 12，因此斜边为 13 米。上述问题都给我们以启示：在许多情况下，如果思路正确，几何问题的求解会变得极其容易。而要做到这一点，这取决于你是否会想到欧几里得几何的某个基本定理。

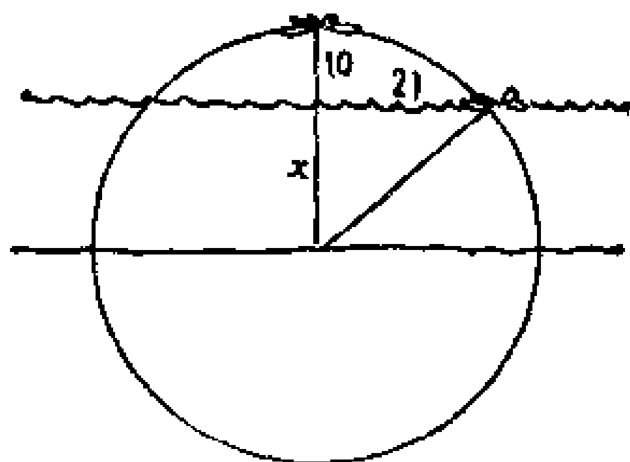
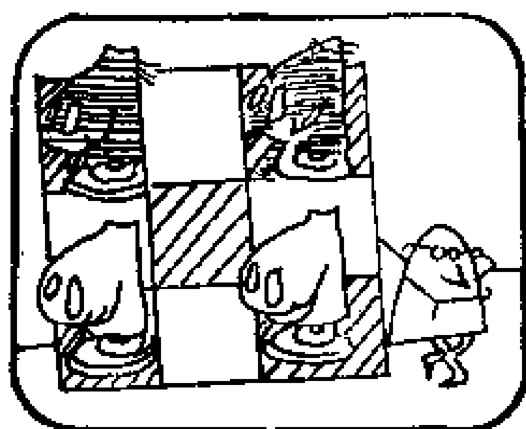


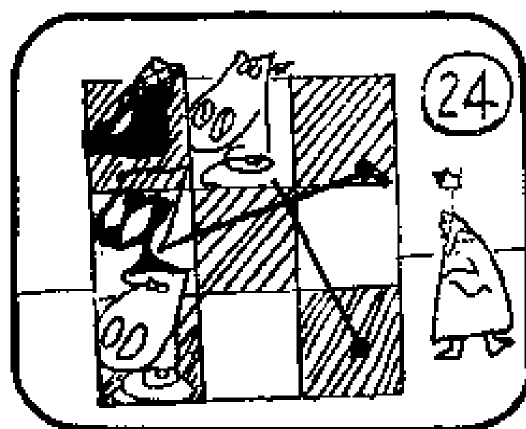
图 4

骑士大调动

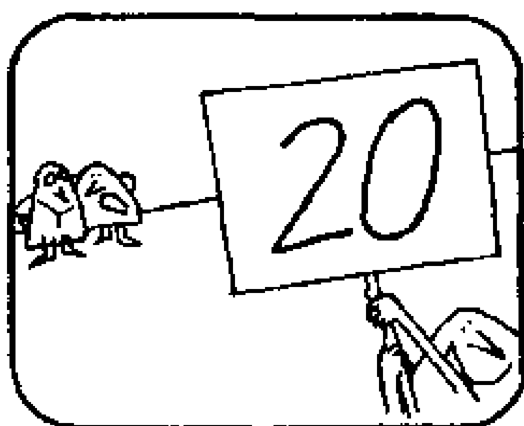


毕晓普先生在国际象棋俱乐部的会上提出了一个问题。

毕晓普先生：使黑骑士和白骑士*互换位置最少需走几步？



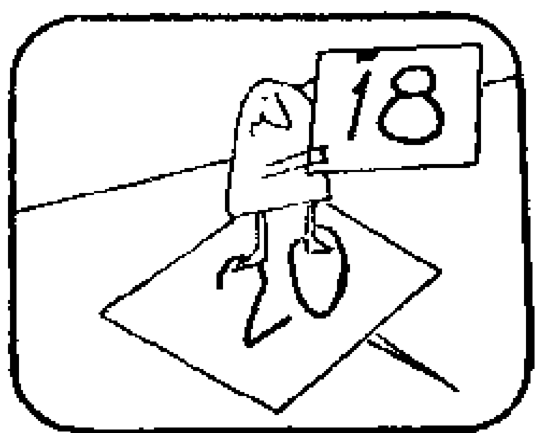
一个男孩走了这样两步棋。使白骑士走到上格，黑骑士走到下格，他共用了24步。



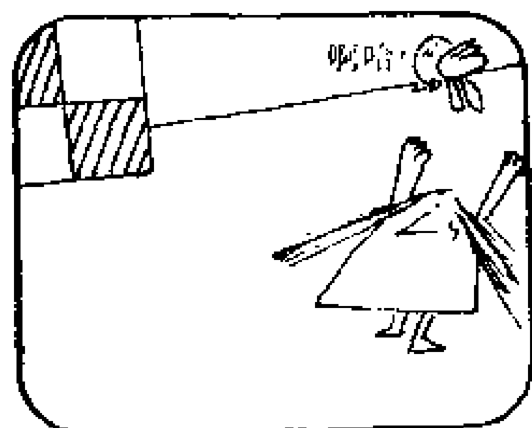
另一个男孩只要走20步。

---

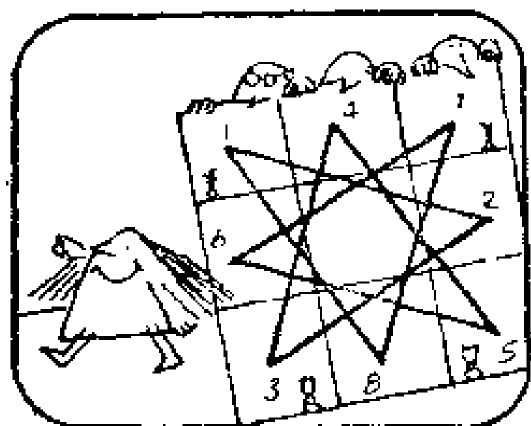
* 国际象棋中骑士的走法和中国象棋的马的走法相同，但骑士不必考虑轧马脚——译注



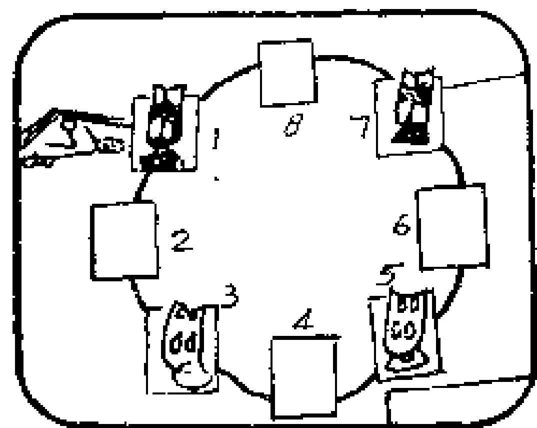
范妮·菲什来了。她走得更好，只用了18步。



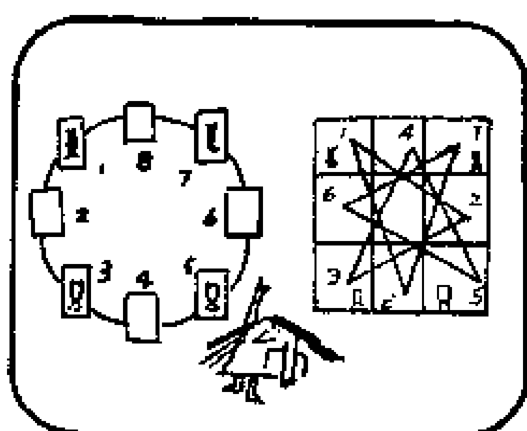
菲什小姐：啊哈！我只要走16步，而且可以证明不能比这更少了。



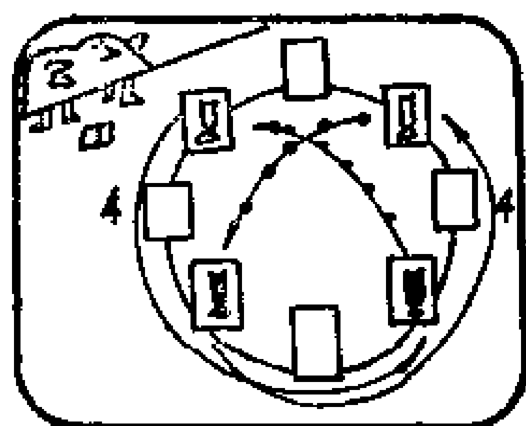
范妮为了便于说明，先画了一张图，其中直线表示骑士每一种可能的走法。



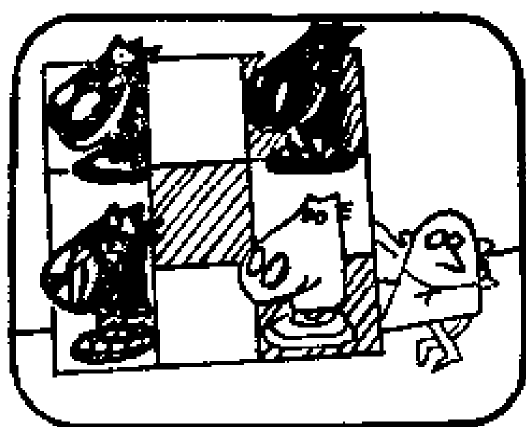
菲什小姐：如果把这些直线看作柔软的线，那8个棋格就象一串缠结成堆的项链上的珍珠，拉开后就成为一个圆环。



菲什小姐：在棋盘上每走一步相当于在这个圆上移动一步。如要使骑士互换位置，我们只需使棋子沿圆环作同向移动即可。



毕晓普先生：对，范妮。四个骑士最终各走了 4 步，一共 16 步，再也不能比这更少了。



范妮把一个白骑士换成红骑士，问会员们要使红骑士和白骑士互换位置最少需走几步。你是否明白她提问时为何脸上带笑？

骑 士 和 星

啊哈！范妮把骑士问题变为一个灵机一动便能解出的同构问题。她所提出的问题亦可用她前面的思路来求解。若把棋格用线连接起来，再拉开成为一个圆，我们可以看到这些骑士在圆上的位置依次为黑、黑、红、白。范妮为何脸上带笑，这是因为她已看出红骑士和白骑士无法交换位置。两者的顺序是无法变更

的，因为在圆上无论沿哪一方向移动，一个骑士总不能超越另一个骑士。你知道这是为什么吗？

若在圆上作顺时针方向移动，白骑士总是紧跟在红骑士后面。除非改变圆上的排列顺序，使红骑士紧跟在白骑士后面，才有可能使红骑士和白骑士互换位置。显然，这是不可能的，因为这必须使一个骑士跳过两个黑骑士。我们把此问题变成了在一条闭合曲线上按拓扑顺序排列的四个点的问题，于是找到一个简单的不可能性证明，而用旁的方法则是极难完成的。你可用其他方法试一试，相信你肯定会同意这种看法的。

你喜欢不喜欢这种双方骑士互换位置的问题？这里还有一个。这个问题对你将是一次更大的考验。请考虑图5所示的一个3×4格棋盘上的问题。如前一样，要求走最少步棋，使三个黑骑士和三个白骑士互换位置。即白骑士占据顶格一排，黑骑士占据底格一排。在这个例子中，其同构图形比较复杂，见图6。

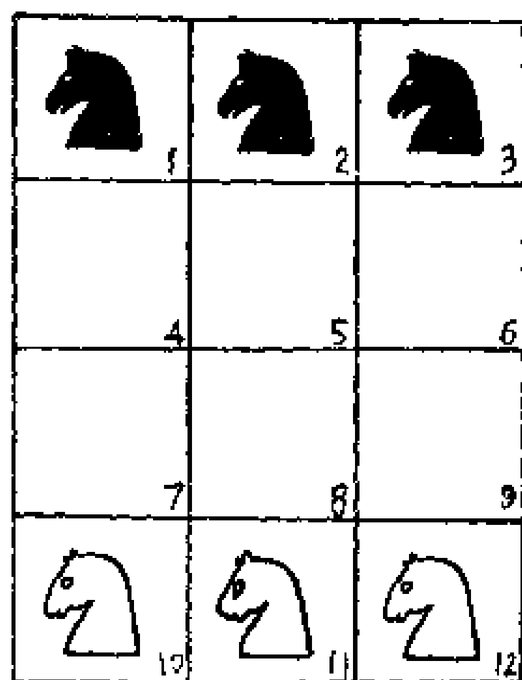


图 5

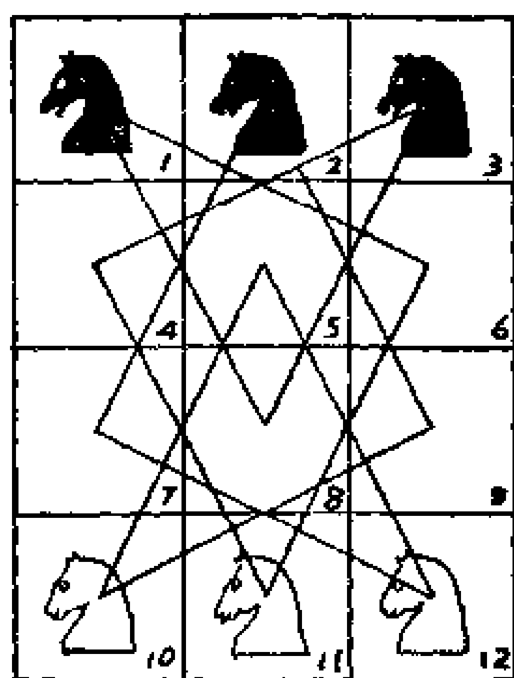


图 6

当然，此图表示骑士每一种可能的走法。假设此图形由线和珍珠组成，虽然我们无法象上个问题那样把此线拉开成为一个圆，但我们可以把此珠串图形拉成为图 7 所示的形式。图 7 中的数字与图 5、图 6 中棋格上的数字相互对应。

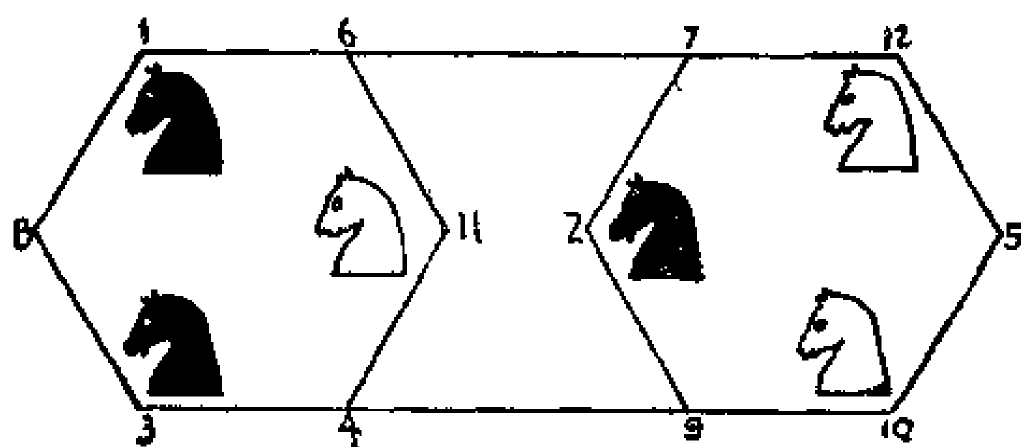


图 7

因此，此图中的黑骑士和白骑士互换位置的问题与原先的问题是同构的，现在再来求解就容易多了。你试试能否找出最少步数为 16 的解法。

如图 8 的星形图所示，一个古老的难题也可应用这种珠串法加以分析，你只需借助七枚分币或七个筹码便能求解。

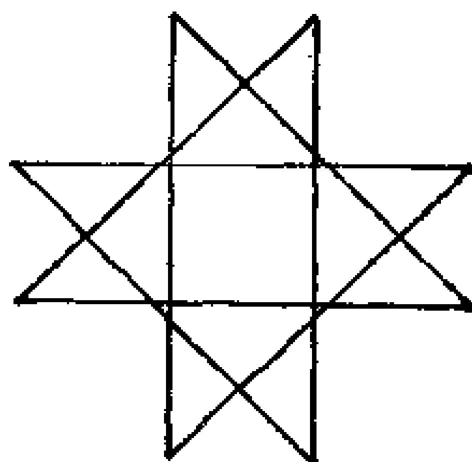


图 8

此问题是这样的：在星上任意一点放一枚分币，使其沿黑线移至另外一点。所移动的分币必须始终留在所移到的点上。

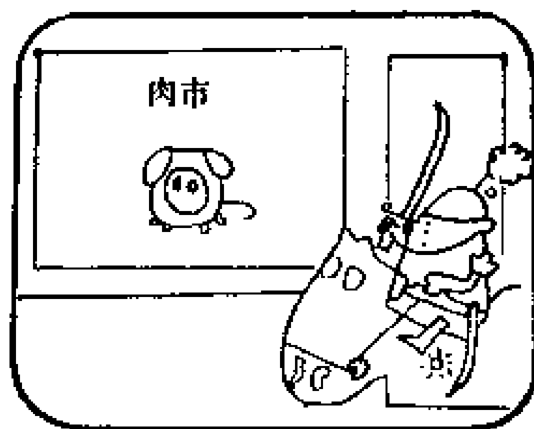
然后在星的任何空着的点上放置第二枚分币，再以同样的方式将其移至任何空着的点上，如此重复直至七枚分币全都放到了点上。

你很快就会发现，除非你仔细设计好一套步骤，并依此方案行事，否则你将陷入困境而无法继续走下去。你所要做的就是设计一个按一定规则放置和移动七枚分币的方案。你有办法吗？

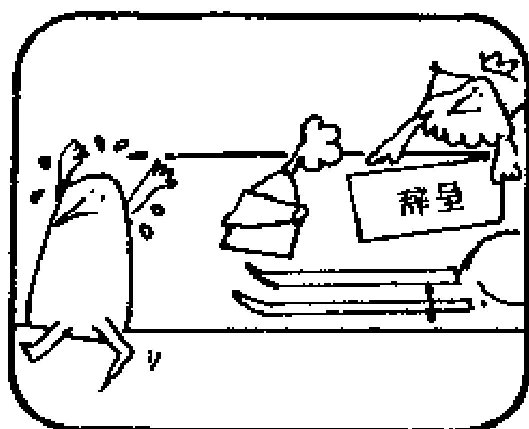
如前两个骑士问题那样，此星形图也可拉开成为一个圆。这时再来考虑放置和移动七枚分币就不难了。解法很多。一种简单的解法如下所述：第一枚分币无所谓，可随意放置和移动。俟后，就须使下一个分币从某一点移至先前分币移动后所空出的点上。

请你的朋友们试试这道难题。即使你(迅速地)作了示范，也没有多少人能解出此题。

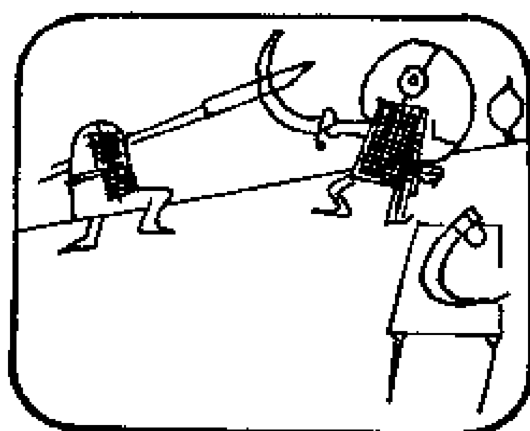
奇妙的刀



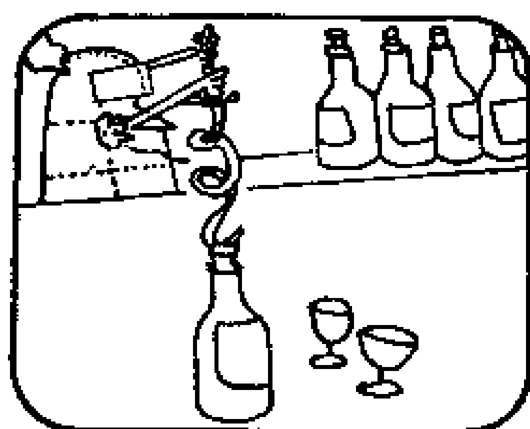
仔细看这画。你看出有什么不对劲吗？



看这把刀，根本就插不进那刀鞘。



若这两把刀分别具有与其刀鞘相应一致的横截面，则刀就可入鞘。但你能否想出第三种形状的刀和鞘。



你是否灵机一动，会想到三维曲线？确实有一种称为螺旋线的螺旋形曲线，它是除上述两种外唯一的、能使刀入鞘必须具有的形状。

普通螺旋线

在现代科学中，尤其在生物学和核物理学方面，螺旋线已成为一种重要的结构。DNA 分子也是螺旋结构。螺旋线与其一维和二维"近亲"——直线和圆不同，它具有"旋转性"，且有右旋和左旋之分。

直线或圆与其镜中的映象全等，但螺旋线并非如此。它在镜中正如刘易斯·卡罗尔著作中的艾丽斯注视镜中的房间时所说的一句话——是“别具其形”。举例来说，一个中微子以光速运动时，由于它是“旋转的”，所以其在时空中的运动轨迹（在某种意义上）是一条螺旋线。中微子和反中微子是具有相反旋转性的螺旋线。

在自然界和日常生活中，螺旋线的例子比比皆是。具有右旋性的螺旋线的传统定义是：在“离开”你时，依顺时针方向旋转的螺旋线。螺钉、螺栓和螺帽通常都具有右旋性。而旋梯、糖棒、弹簧、绞股绳、电线和绳索则两种形式都有。理发店的招牌柱又是如何呢？

在自然界中，螺旋形的例子还包括许多动物的角、圆锥形海贝、一角鲸的长牙、人耳的耳蜗以及脐带。在植物界的茎、梗、蔓、籽、花、毬果、叶子、树干等上面也可见到螺旋线。松鼠在树间跳上跳下时的轨迹是一条螺旋线。蝙蝠出洞时的飞行轨迹也是螺旋线。某些大气现象，例如旋流和旋风等都显示圆螺旋形。水流入下水道时也会呈螺旋状。自然界在这方面例子不胜枚举，请参阅马丁·迦德纳所著的《神秘的世界》一书。

标准的螺旋线是沿圆柱体旋转面上所形成的一条曲线，它与圆柱体的母线形成一个常数角（母线即是在圆柱体表面上与轴线平行的一些直线）。设此常数角为 θ，显然，当 $\theta=0$ 时，螺旋线是一条直线；当 $\theta=90^\circ$ 时，螺旋线是一个圆。使 θ 在 0° 至 90° 范围内变化，通过对螺旋线参数方程的分析可以确定上述断言。所以，直线和圆是所谓螺旋线的空间曲线的极端形式。这就说明了如果刀入鞘，其形状必须是螺旋线或两种极端形式。

螺旋线在平面上的投影显然是一个圆。如果投影是在与螺旋线轴成直角的情况下进行的，那么它是一条正弦曲线。这一点也很容易通过曲线参数方程加以证实。用这种现象来介绍正

弦曲线及其性质是很生动有趣的。

这里有一个有趣的故事，解此螺旋线问题需要具有洞察力。一座高为100米的圆塔，其内部有一电梯，塔外亦有螺旋形梯子盘旋而上，旋梯与垂线所成的常数角θ为60度，圆塔直径为13米。

一天，皮扎先生偕夫人乘电梯至塔顶了望台。他们的儿子汤马托·皮扎在塔外自底向顶沿旋梯踏级而上。他登上了望台时已气喘吁吁。

"不用说，你累坏了，孩子，"皮扎先生说。"你到台上的距离一定是我们的四倍，况且你是走上来的。"

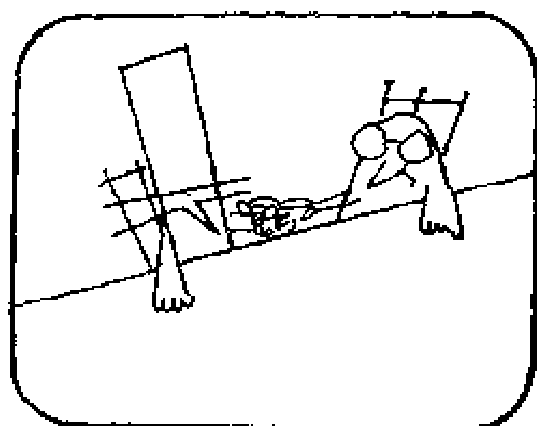
"你错了，爸爸，"汤姆说。"我走的距离仅是你的两倍。"

汤姆和他父亲究竟谁对？你也许以为需要按圆塔直径来求出螺旋形梯子的长度。出乎意外的是：圆塔直径13米是一个与题解无关的数据，完全可以忽略！

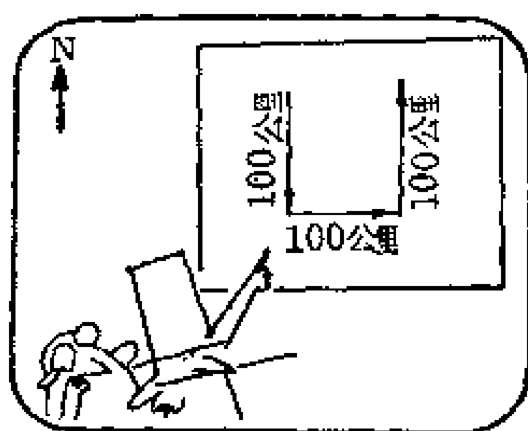
为何圆塔直径无关紧要，这是因为旋梯相当于内角分别为60°、30°和90°，高为100米的直角三角形中的斜边。

在这样一个三角形中，斜边自然是高(30°角所对的那条边)的两倍。因此汤姆的看法是正确的。你可以把一卷邮件或其状如圆筒的纸卷展开来验证这一点。其结果可能使你感到诧异。你很快就会发现：当纸卷的螺旋形边长与柱面宽度属于上述直角三角形中的情况时，两者的长度是毫无关系的。

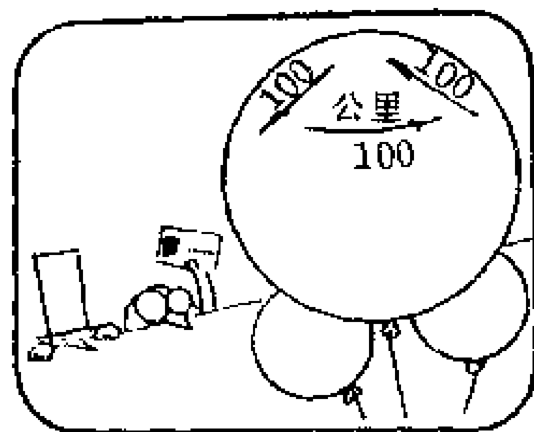
航空飞行



丹先生以好出怪题而远近闻名。一天，他正与朋友迪克，一位民航驾驶员，在一起喝酒。

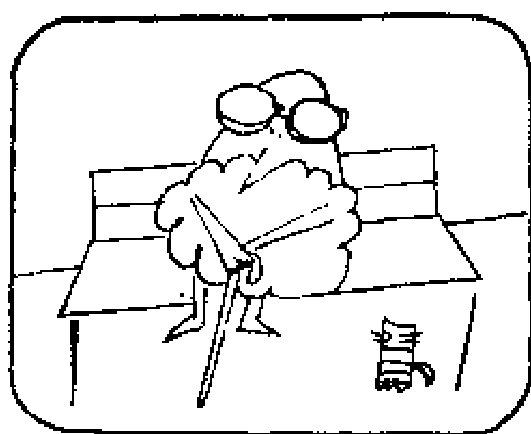


丹：迪克，我敢说，这个问题你答不出来：一个飞行员向南飞100公里，再向东飞100公里，再向北飞100公里，这时他发现又回到了原出发点，问他是从哪里出发的？

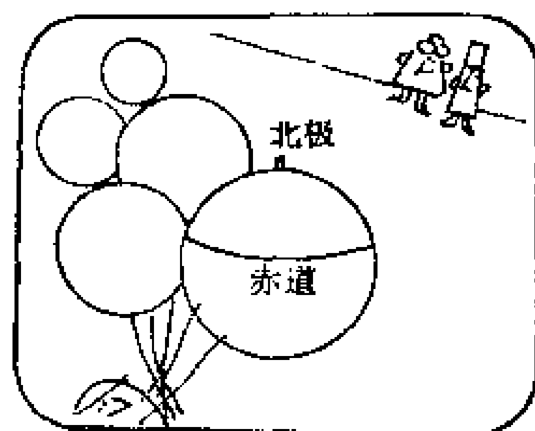


迪克：这有何难，丹。这题并不新鲜。他是从北极出发的。

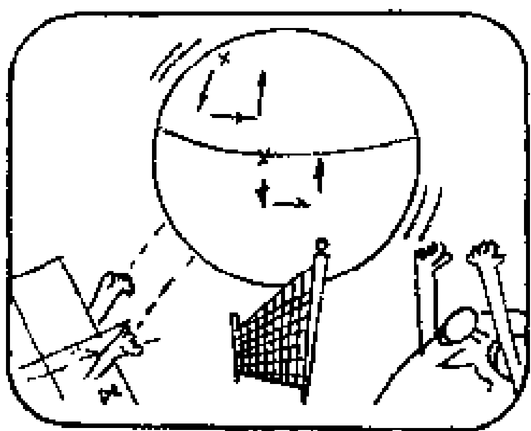
丹：对，算你胜了。现在请你再想一个符合那题意的出发点，我敢说你答不出。



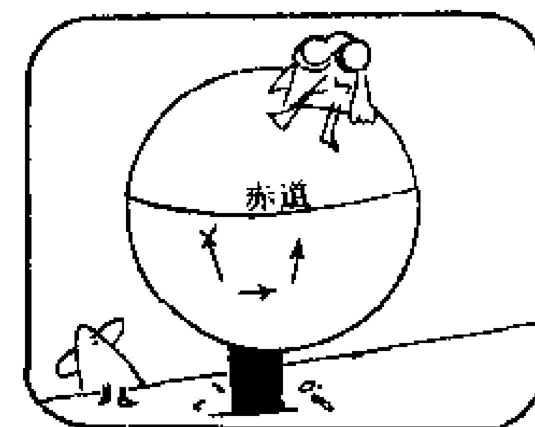
迪克苦苦思索了很长时间。



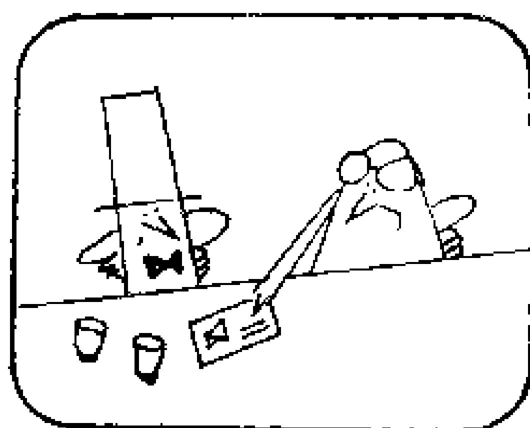
迪克：不可能还有一个这样的出发点。丹，我可以证明给你看。假设飞行员从北极和赤道之间的任何一点出发。



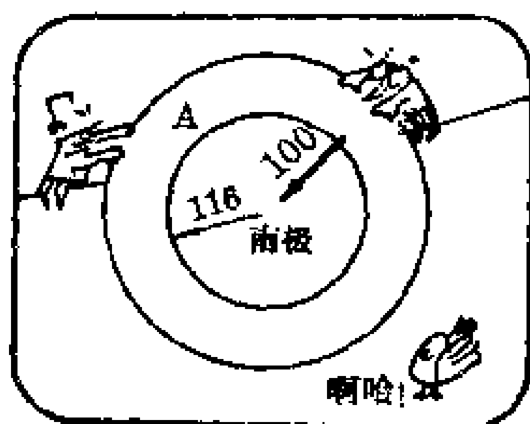
迪克：显然，他并不飞回原来的出发点。若他从赤道上出发，他结束飞行时所处的位置距出发点有100公里。



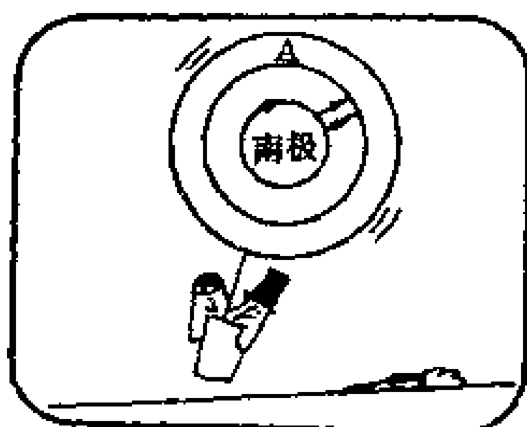
迪克：如果从赤道南面的任何一点出发，他最后将离出发点100公里以上。



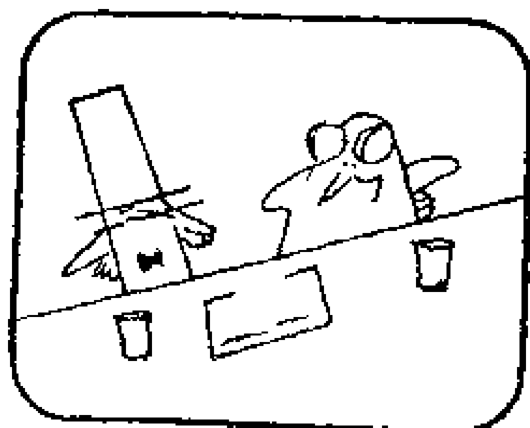
丹：好，瞧我的。你敢说我也答不出吗？迪克输了，你知道为什么吗？



设飞行员从圆 A 上的任何一点出发，圆 A 离南极 116 公里，首先他向南飞 100 公里。



然后，他向东飞 100 公里，实际上是绕极点飞了一圈。这时再往北飞 100 公里必定回到原出发点，对吗？

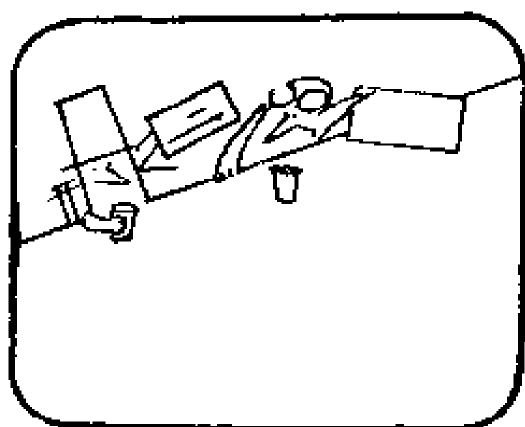


迪克：不错，你胜了。

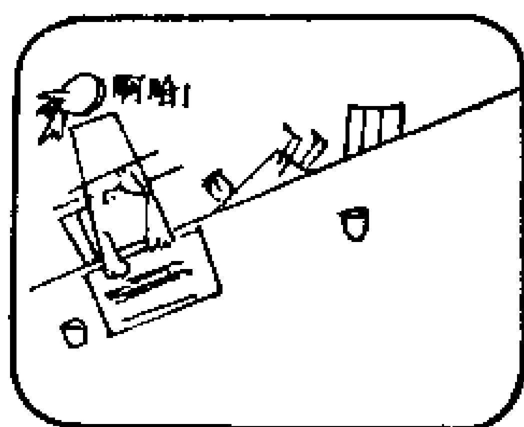
丹：你敢肯定我想不出还有一个出发点吗？

迪克：你的意思是除却北极和圆 A 上的任意一点吗？

丹：对，就是这个意思。



迪克：好，我敢说你想不出。



可怜的迪克又输了。啊哈！他竟没想到这一点。

出 发 点

迪克第二次又输了，因为他没有想到飞行员可以从非常靠近南极的某点出发，而当他向东飞行100公里后，他正好绕着极点转了二圈，而在前一个解中只是转了一圈。这样又有了一个圆，圆上任意一点都是问题的解。依此类推，飞行员也可以从一个更小的圆上的任意一点出发，使得他向东飞100公里正好是绕南极转了三圈、四圈……。可以看出，问题的解即出发点是位于由同心圆组成的无限集合的每个元素上。这些圆的圆心都在南极，其半径的极限趋近于零。

这里还要考虑一个航行问题，它涉及一种十分有趣的球面曲线称为斜驶线或航程线。某飞行员从赤道出发，保持东北方向飞行。他航行的归宿在哪里？航程多少？航行轨迹是何形状？

你可能惊讶地发现其航行轨迹是一条螺线，以一个常数角切割地球上的经线，最后恰好终止于北极。航程是一条球面螺旋线，环绕北极作了无数个圆，最终一直“扭”到极点。把飞行员看作一个动点，从诗论的意义上来讲，即使这个动点绕北极转了无数圈，其轨迹还是具有可以计算的有限长度。所以，如果飞行员(看作为一个点)作匀速运动，他将在有限时间内到达北极。

平面地图上的斜驶线根据地图投影的不同方式而具有不同的形状。在一张我们熟悉的由麦卡托* 投影法制成的世界地图上，斜驶线成一条直线。毫无疑问，这就是为何航行者都利用麦卡托地图的缘故。如果船只和飞机航行时罗盘仪方向保持不变，其航程便是一条很容易画在地图上的直线。

如果飞行员从北极出发，保持西南方向航行，那又会怎么样？这个问题与上一个问题正好相反。如前一样，其轨迹也是一条斜驶线，但这次我们无法确定飞行员抵达赤道时将降落在哪一点上。他可以降落在赤道上的任何一点。你可以用时间倒退法来证明。飞行员可从赤道上的任何一点出发，其返程的终点必定是在北极。然而，如果飞行员到达赤道后不是返回而是越过赤道继续航行，那么他的斜驶线将会“扭”到南极。

当一条斜驶线投影到与赤道平行面与一极相切的平面上时，其形状是一条等角螺线，或称对数螺线。这条螺线总是以一个常数角切割其向量径。

另一个著名的轨迹问题四臭虫问题，它同样涉及到对数螺线。然而，啊哈！有一个妙不可言的解法，可以免去大量繁琐的计算。这里我们用皮扎一家所养的四只龟的故事扼要地说明这个问题。

汤姆·皮扎成功地训练了他所养的四只龟。艾布纳总是朝伯

* 麦卡托(Mercator)，佛兰达斯的一位数学家、地理学家——译注

莎爬去，伯莎朝查尔斯，查尔斯朝佩利拉*，佩利拉则朝艾布纳爬去。一天，他把这四只龟按 $ABCD$ 顺序放在一个正方形房间的四个角上。他及其父母都注视着将要发生的情况。

"非常有趣，孩子，"皮扎先生说。"每只龟都朝它右边的龟爬去。它们的爬行速度相等，因而在每一时刻它们都处于一个正方形的四个角上"(图 9)。

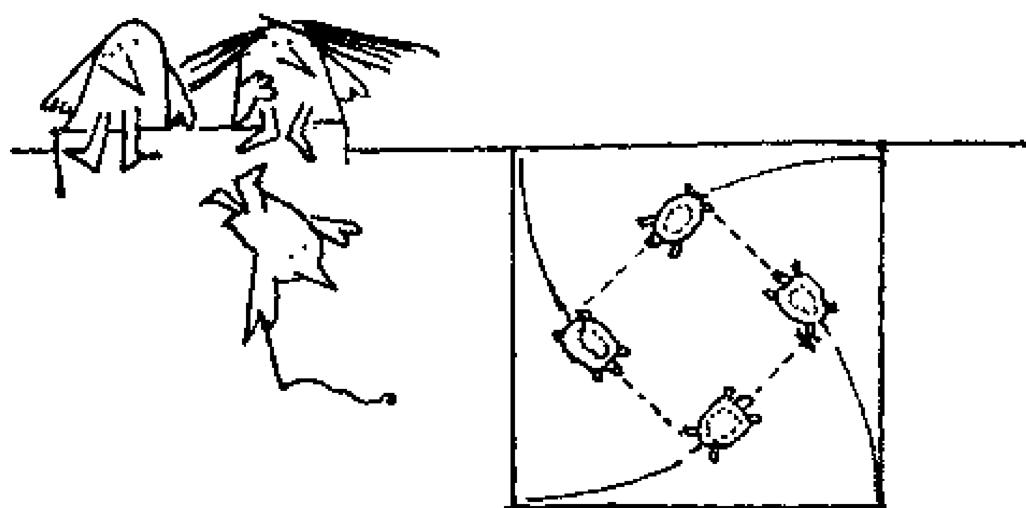


图 9

"是的，爸爸，"汤姆说。"随着正方形的旋转，其面积越来越小。瞧！它们正好在中心碰头！"

设每只龟以每秒 1 厘米匀速爬行，正方形房间每边长 3 米，问四只龟需要多少时间才能在中心碰头？当然，我们必须把这些龟看作为理想的点。

皮扎先生想通过计算来求解。他在新买来的袖珍可编程序计算器上按来按去。突然，皮扎夫人脱口而出："你不必计算，亲爱的。简单得很！时间是 5 分钟。"

皮扎夫人想出了什么妙主意？

我们来考虑两只相邻的龟的情况，以艾布纳和伯莎为例，在每一时刻，伯莎都沿着与跟踪它的艾布纳成一直角的方向移动。

---

* 艾布纳、伯莎、查尔斯和佩利拉分别为四只龟的名字——译注

因为艾布纳总是直接朝伯莎爬去，而伯莎也一直朝查尔斯爬去，所以这些龟始终位于一个正方形的四个角上。由于伯莎的移动对艾布纳说来是不即不离，它的移动既未增加也未减少它和艾布纳之间的距离。因此，它的移动可以不予考虑。情况恰如伯莎停留在正方形房间的一角，艾布纳沿房间一边向它爬去一样。

上述分析是解题的关键。艾布纳的爬行曲线必定与正方形房间的边长恰好相等。由于边长为300厘米，而艾布纳的爬行速度为每秒1厘米，所以需时300秒即5分钟。其余三只龟也是如此。经过5分钟，这四只龟将会在正方形的中心碰头。

借助于袖珍计算器，很容易用图解表示时间按很小的增量增加时四只龟的轨迹，即画出每一时间间隔结束时正方形的四条边。结果是一个颇令人惊讶的图形(图10)。

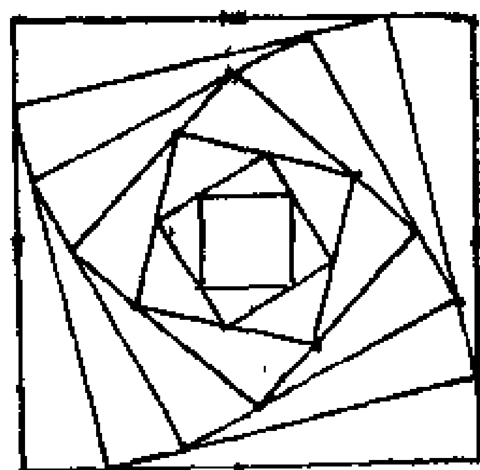
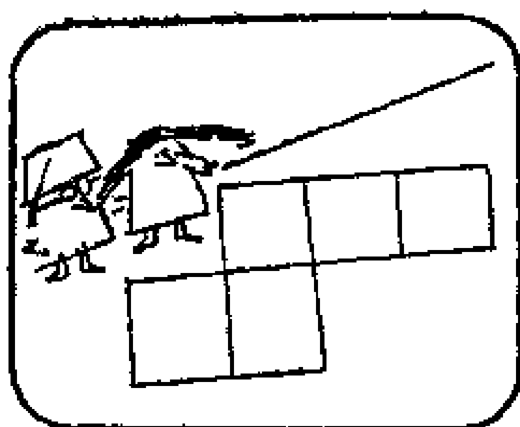


图 10

你能否把这个问题进一步扩展到所有正多边形的情况？首先研究等边三角形的情况，再考虑正多边形。你能否找出一个已知初始多边形的边长，求跟踪轨迹长度的通用公式？假设无数只龟(看作为点)从一个具有无限条边的多边形的各个角出发，一一跟踪，那又会是什么结果？它们最终是否会碰头？如果初始多边形不是等边，又有何不同？如果四只龟从长方形而非正方形的房间的四个角出发，又会是怎样呢？

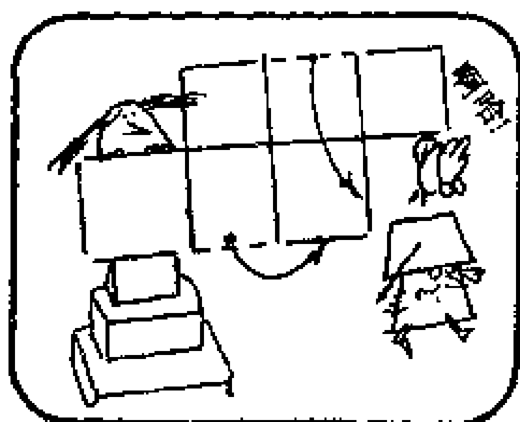
若在第一个问题中，四只龟在正方形中心碰头后，它们不愿意待在一起，又开始向外爬去，每只按远离其左边一只的方向移动，问这四只龟是否必定回到房间的四个角上。

奎贝尔的火柴

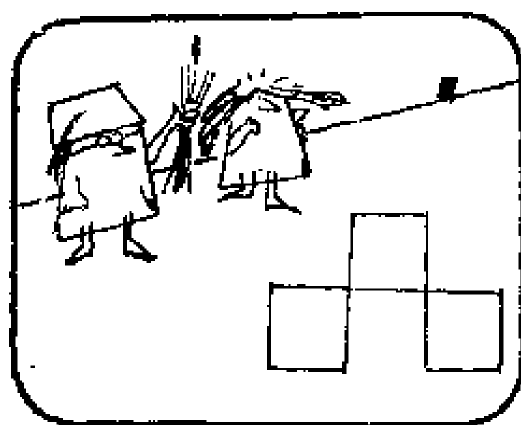


梅布尔正在向奎贝尔教授讲述一个火柴难题。

梅布尔：只移动两根火柴，使其变成四个同样大小的正方形，不可将火柴折断、重选或重折。



奎贝尔教授：看来你是一个老手，梅布尔。只需移动这两根火柴问题就解决了。



奎贝尔教授然后把四根火柴拿掉，只留十二根在桌上。

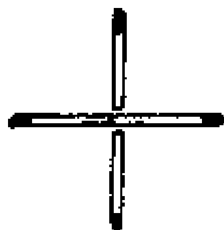
奎贝尔教授：好啦，梅布尔，请你用这十二根火柴组成六个单位正方形。梅布尔只好甘拜下风，你能否帮他解决？

火柴游戏

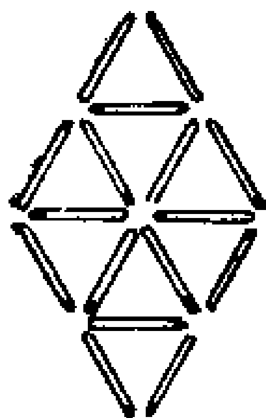
为了解奎贝尔教授的问题，梅布尔必须考虑到这一点：并没有对她说过这十二根火柴必须位于同一平面上。就三维结构来说，不难以十二根火柴为边组成一个单位立方体。自然它有六个面，且都是正方形。当罗茜发现乳酪的切分法时，也是由于领悟了这一点。

这个问题的另一种形式也许大家更为熟悉，即用六根火柴组成四个全等的等边三角形。这个问题的解是形成一个正四面体的框架。

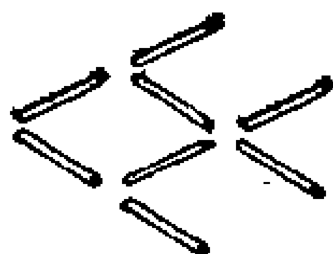
这里还有六个巧妙的火柴或牙签问题。解法很巧妙，啊哈！你能否解决？



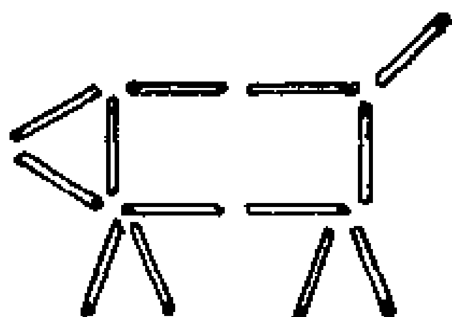
1. 移动最少根数的火柴使其成为一个正方形。



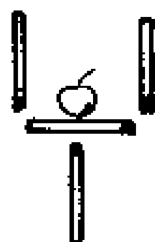
2. 去掉最少根数的火柴，使图中的八个等边三角形保留四个，不允许端点完全脱离。



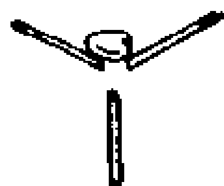
3．移动最少根数的火柴使这条鱼反向而游。



4．移动最少根数的火柴使这头猪反向而望。



5．移动最少根数的火柴使樱桃不在这老式的玻璃杯内。杯子可朝任何方向，但当然不允许移动樱桃。

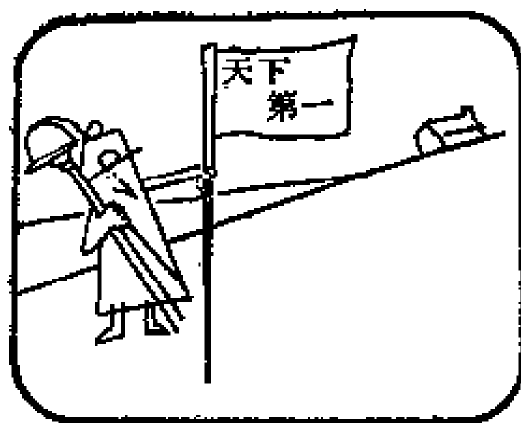


6．移动最少根数的火柴使橄榄不在这马提尼酒杯之内。与前一样，杯子可朝任何方向但不允许移动橄榄。

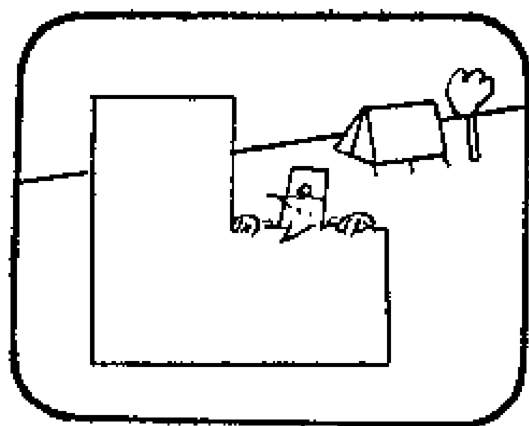
如果把实际解法写在这里，读者就索然无味了，所以我们只把所需移动的最少根数提供如下：

1．一根。
2．四根。
3．三根。
4．二根。
5．二根。
6．零根。

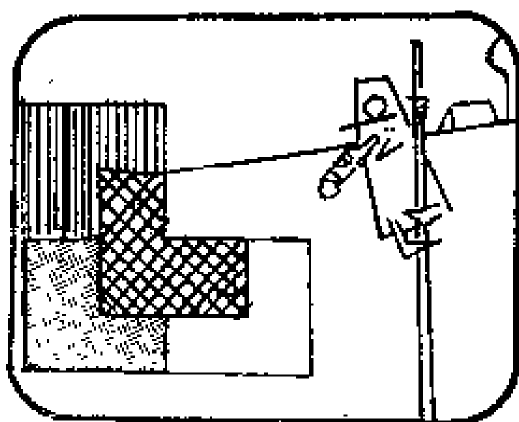
巧妙的划分



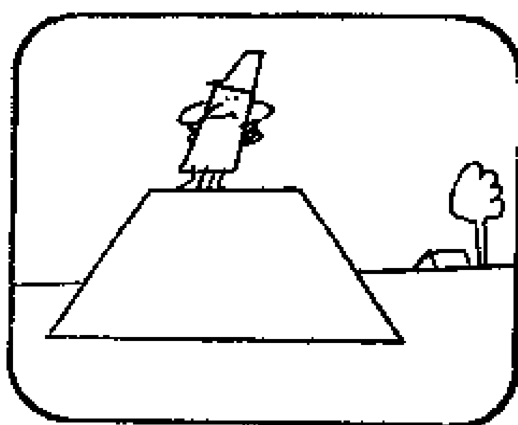
兰塞姆是一个测量员，擅长把奇形怪状的地皮划分成一些全等的部分。



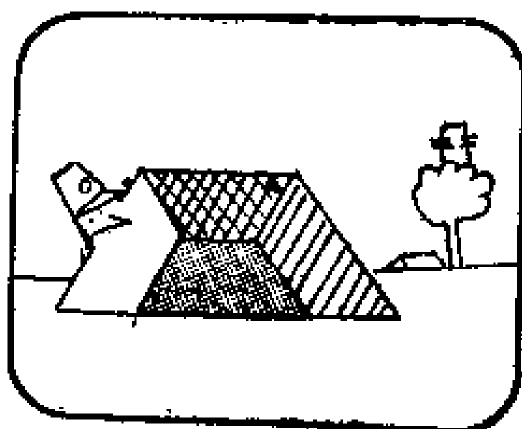
一次，请他把这块地皮划成四个全等的部分。你想他是如何解决的。



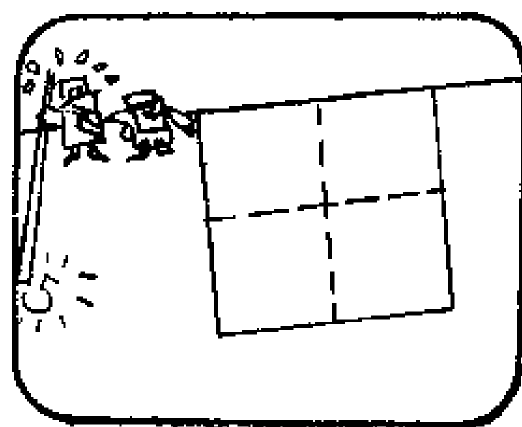
这是唯一的解法。



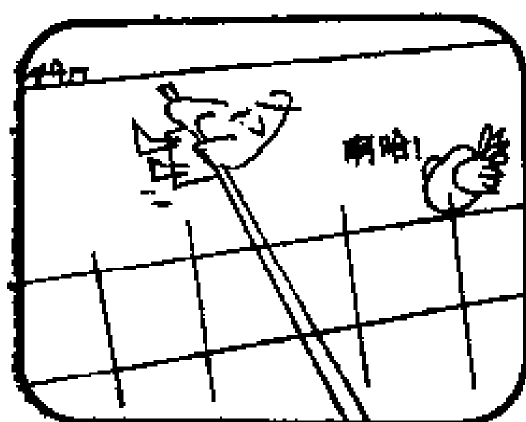
兰塞姆的下一个任务是把这块地皮分成四个全等的部分。这事有点棘手。



然而，他几经努力终于找到了答案。

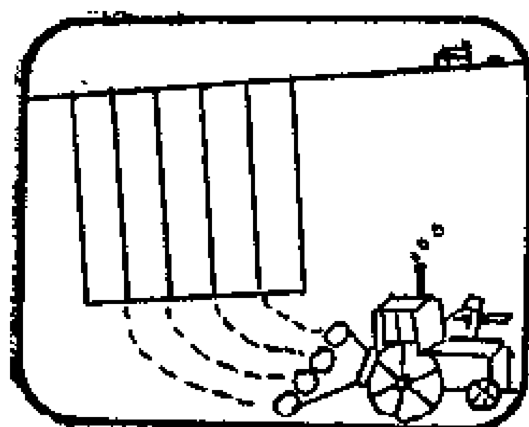


把一个正方形划分成四个全等的部分，这个问题对于兰塞姆来说易如反掌。但请他将此分成五个全等的部分时，他一时感到为难。



兰塞姆：我想不出来。一定有一种方法。呣，啊哈！我明白了。

你能猜出兰塞姆有了什么好主意吗？



兰塞姆：真好笑。这种方法可把一个正方形划分成任意数目的全等的部分。

剖 分 理 论

你可把兰塞姆的三个问题考考你的朋友，以博一笑。前两个难题的解是些很奇特的形状。这些形状给人以一种微妙的启示：既然一个正方形无法分成五个正方形，那必定得分成五个特别的形状。很少有人想到这一显而易见的解法，令人好生奇怪。顺便提一下，把一个正方形分成五个全等的形状，仅此一种方法。

你把这个难题考过你的朋友之后，还可再给他或她试试与此有关的第四个问题。首先向你的朋友说明怎样把图 11 中的一块地分成四个全等的部分，再问能否把这块地分成三个全等的部分。

你的朋友也许因为题目太难而很快泄气。曾记否兰塞姆把一个正方形分成五个等同部分的那种诀窍。你可向你的朋友说

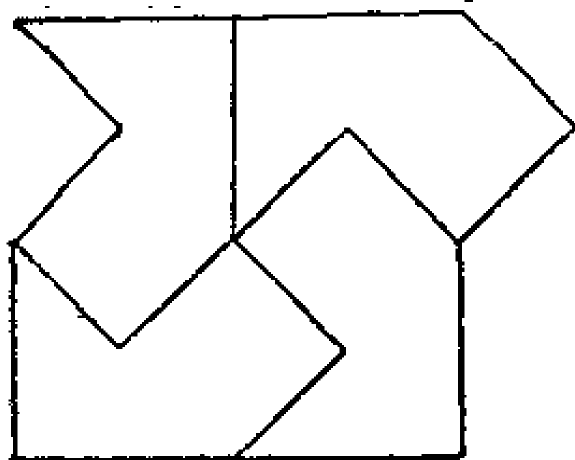


图 11

明如何运用这种诀窍使问题迎刃而解，他或她将会恍然大悟。图12为此问题的答案。如前一样，这种方法显然也适用于把这块地皮分成任意个等同的部分。

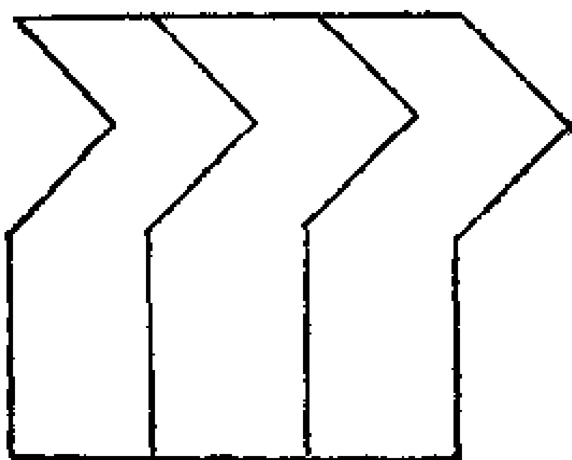


图 12

象切分乳酪问题那样的难题一样，上述问题也属于所谓剖分理论，它是趣味数学中丰富多采的一个分支。许多平面几何和立体几何中的实际问题的求解可以从中得到有益的启示。兰塞姆的前两个问题特别令人感到兴趣，因为每块地皮是被分成与原先形状相同的若干块。形状具有这种性质的称为重复花样。

图13又显示了几种重复花样。你能否把每种形状分成若干与此形状相同的部分？显然，若拥有源源不断的重复花样，你便能非周期性地铺成一个平面。例如，考虑一下兰塞姆第一次所解的那种L形重复花样，四个这样的L形可组成一个大的L形花样，四个大L形又可组成一个更大的L形花样，依此重复下去可铺成一个无穷大的平面。请注意我们也可按相反方向无限重复下去，把每一个L形分成四个较小的L形，再把这四个L形分成更小的L形，直至无穷小。

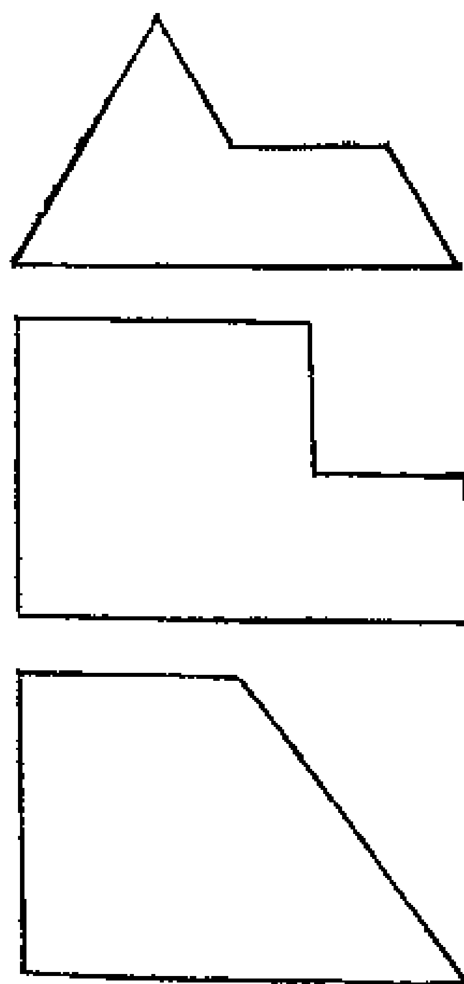


图 13

关于重复花样所知甚少。已知的重复花样也可周期性地铺成平面，这就是说，在所铺成的平面中有一种基本图形，它们以平移而非旋转或反射的方式组成平面。是否存在一种无法进行

周期性铺面的重复花样？这是铺砌理论中一个著名的悬而未决的问题。

关于立体重复花样所知就更少了。当然，正立方体是其中之一，因为八个正立方体放在一起可组成一个大立方体，正如四个正方形放在一起可组成一个大正方形一样。你能否想出别的立体重复花样的例子？

如果被分成的若干全等图形并不要求与原先的地皮形状相同，那么还可提出许多别的非同一般的问题。例如图 14 是一个由五个单位正方形组成的 T 形。这个 T 形无法分成四个更小的 T 形，但你能否将其分成四个某种形状的全等部分？

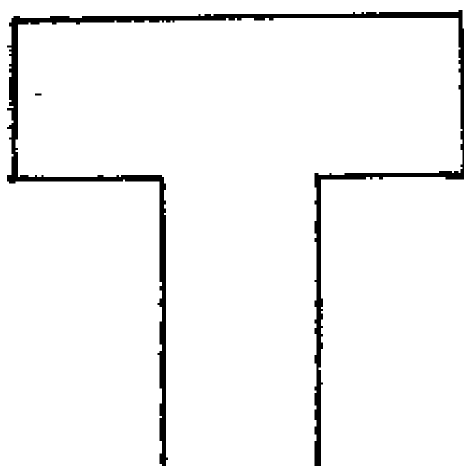


图 14

甚至把一个平面图形分成两个全等部分也可能是困难的。图 15 是一些你可能会感兴趣的例子，其解请见书末。

在剖分理论中还有一个优美的分支，它涉及把一个已知多边形分成个数最少的任何形状的部分，使得这些部分能够重新组成所规定的另一个多边形。例如，一个正方形最少须分成几部分以重新组成一个等边三角形(答案是 4)。哈里·林格伦所著的《几何剖分趣味问题及其解法》一书极为生动地叙述了这方面的内容。

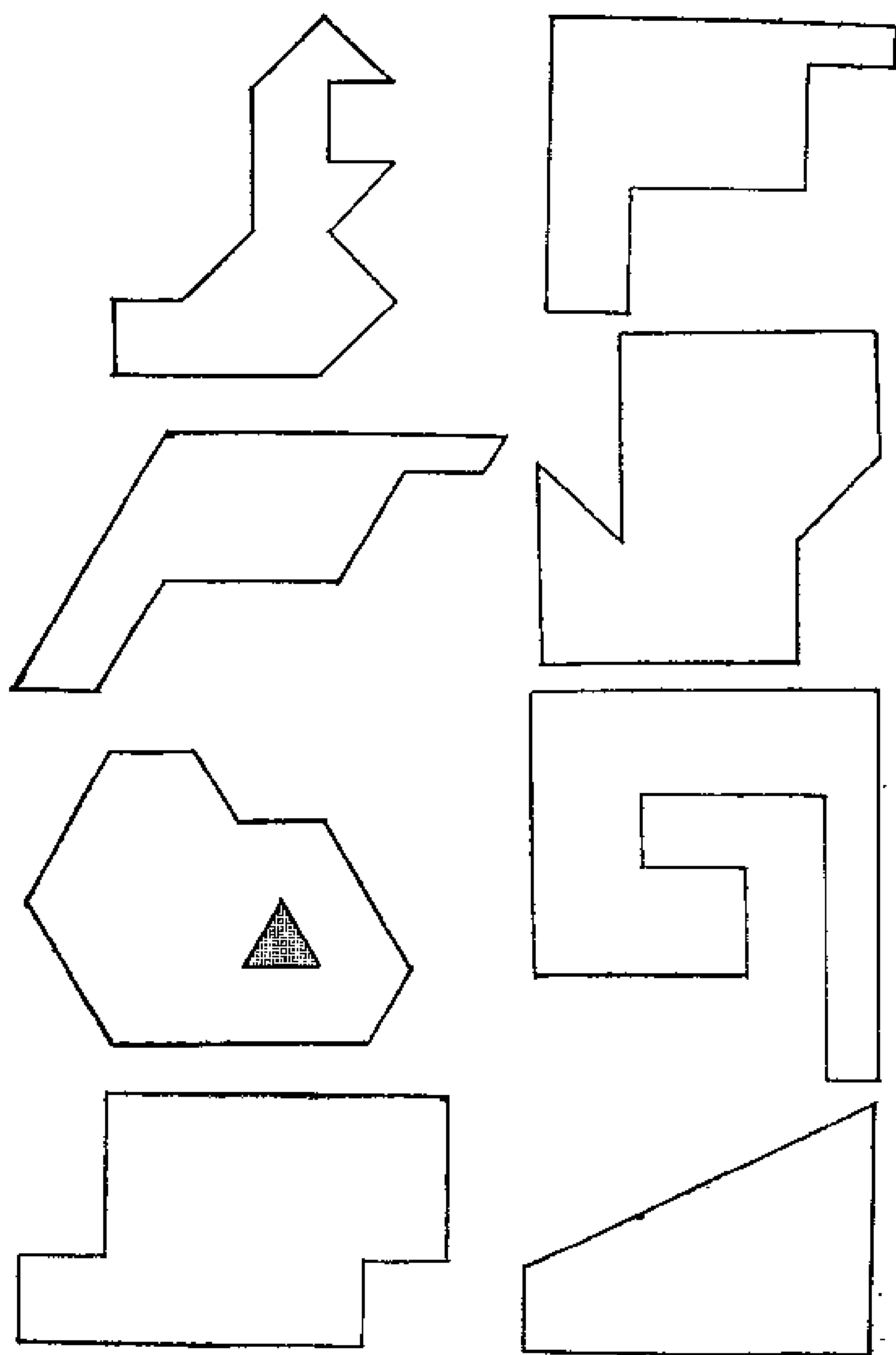
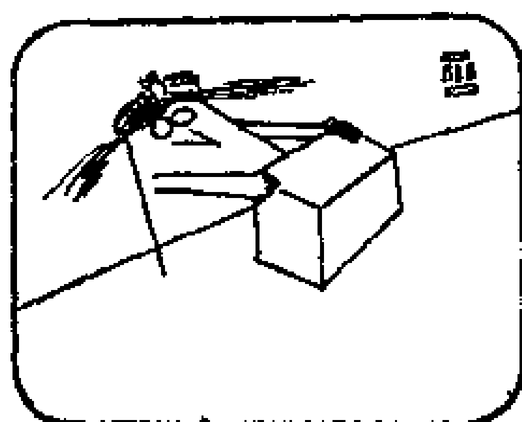


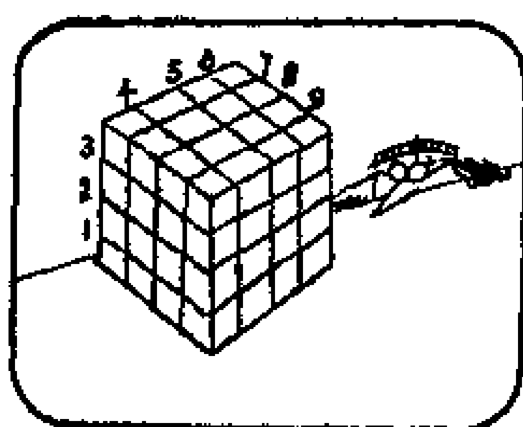
图 15

尤卡里特小姐的立方体

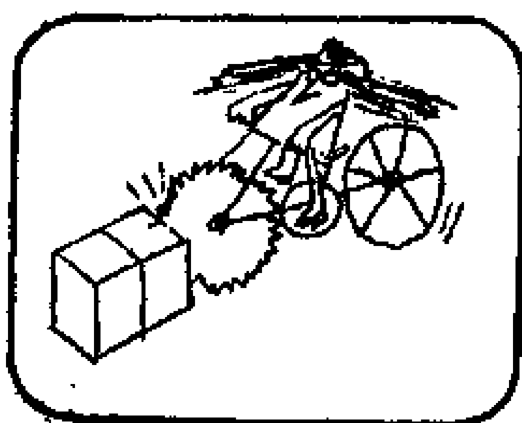


尤卡里特小姐把一块很大的木头立方体放在桌上。

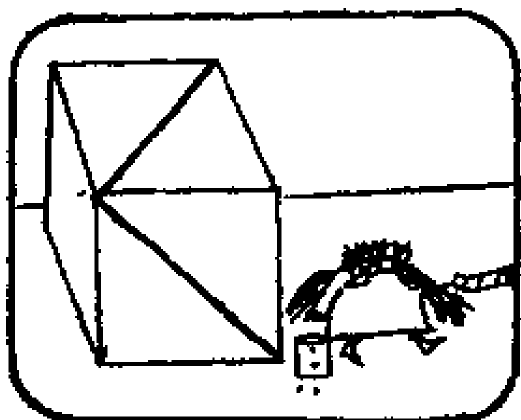
尤卡里特小姐：今天我要好好地考你们一下。就这个立方体提三个问题。



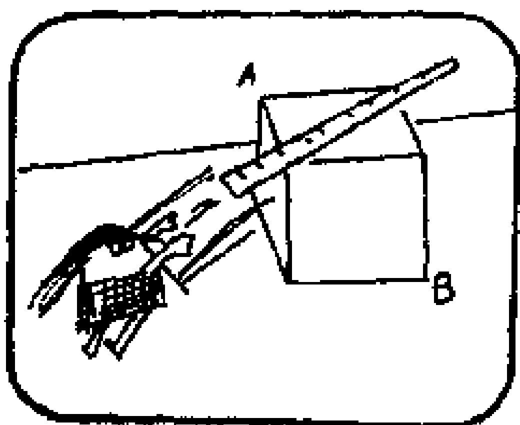
尤卡里特小姐：我们用一个台锯锯九次便能将其分成64个单位立方体。



尤卡里特小姐：如果在锯前允许把锯开的各块重新排列，那么只需锯六次。第一个问题是证明少于六次便不能达到目的。



当学生们在考虑第一个问题时，尤卡里特小姐在这立方体的两个面上画了共一点的两条对角线。



尤卡里特小姐：下一个问题是求这两条对角线之间的平面夹角有多大？

尤卡里特小姐拿一把米尺放在立方体的顶面上，准备提出最后一个问题。

尤卡里特小姐：若用这把尺测量从 A 至 B 的空间对角线长度，有什么最简单的方法？

你考得如何？我三道题中只做出两道。

尤卡里特小姐的立方体

第一个问题的解法：对于一个 $4\times4\times4$ 的立方体，若平面锯割次数少于六次，则无法将其锯成 64 个单位立方体（每次锯割后允许将锯成的立方体重新排列）。为了证明这一点你只需考虑大立方体内部的 8 个小立方体中的情况。由于这些小立方体没有一面属于大立方体的表面，所以这种小立方体的六个面都必须经过一次平面锯割才能形成。鉴于锯割一次平面只能锯成小立方体的一个面，显然，六个面至少必须锯六次才成。

如要把任意一面都可分成整数单位的长方体锯成若干个单位立方体，允许在锯后将锯成的各部分重新排列，但要求平面锯割的次数为最少，试问这方面是否有一个普遍适用的步骤方法？有的，此方法如下所述：沿着在某角点相交的三条边中的任意一条，确定其最少需要锯几次才能横截这条边从而把立方体锯成若干单位宽度的部分。为了求最少需要锯几次，首先横截这条边锯成单位宽度数尽量接近于一半对一半的两部分，然后把锯开的两部分迭合，重复此过程直至锯成单位宽度的各部分为止。每条边都有一个最少的锯割次数，三个最少次数之和即是所求的解。

例如，一个 3×4×5 的木块需要锯七次：长为 3 的一边锯二次，长为 4 的一边锯二次，长为 5 的一边锯三次，总共七次。早在 1952 年在数学杂志上发表了这一算法的证明。

第二个问题的解法：要解这个问题，关键是在立方体的另一个面上再画一条对角线，从而把尤卡里特小姐所画的两条对角线连接起来(图 16)。

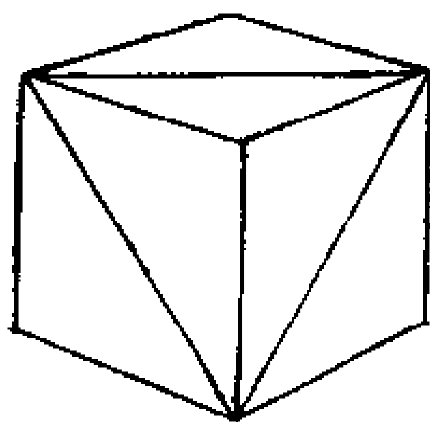


图 16

这三条线组成一个等边三角形，其内角为 60 度，所以我们证明尤卡里特小姐立方体上的那个平面夹角是 60 度。

这个问题还可巧妙地加以扩展。假设尤卡里特小姐在立方

体上画了两条线，如图 17 所示，把三条边的中点连接起来，问这两条线之间的平面钝角有多大？

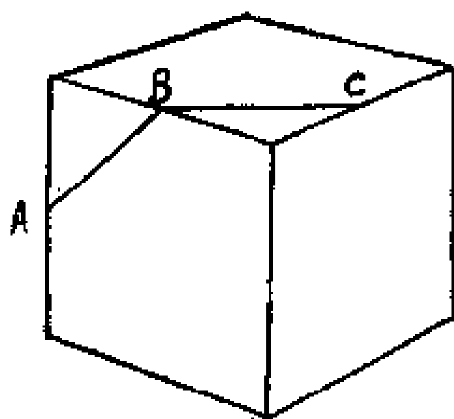


图　17

解法同前，首先在另外四个面上各取一个中点并将其连接起来，使这六条线沿立方体成为一个闭合回路。显然，这六条线段长度相等，每一对邻角也都相等。因此，如果能证明所有顶点都在同一平面上，那么这六条线就构成一个正六边形。这可能要用到一点演绎法或解析几何。但你也可以用实物试一下，沿着由那六个中点组成的平面，把一个立方体木块锯成相同的两半。

一个立方体可以一锯为二，其截面是一个正六边形。这一点确实令人惊奇，几乎是与直觉不合。当然，一旦我们明白原题中的两条线就是正六边形的一对邻边，就知道它们之间的夹角是 120 度。

图 17 还可提出一个有趣的问题。假设一只苍蝇沿着立方体表面从中点 A 爬到中点 C，图中两个线段是否为苍蝇爬行的最短路线？

此问题的关键与下面有关：若要求 A 至 C 的最短路线，可以先把立方体“展开”，使得两个邻面处于同一平面，然后在此平面上从 A 至 C 画一条直线。我们须考虑一下，因为这样

做有两种方法：把朝前的一面和朝上的一面展开，或把朝前的一面和朝右的一面展开。第一种情况，路线的长度为$\sqrt{2}$；第二种情况，路线的长度为$\sqrt{2.5}$。据此证明图 17 所示的路线确实是沿着立方体表面从 A 至 C 的最短路线。

第三个问题的解法：当然，你可以量一下立方体的边长，然后两次反复应用毕达哥拉斯定理从面求出那条空间对角线的长度。但有一种简单得多的方法，即把立方体放在一张方桌上，使其与桌角齐平，然后在离桌角距离为 x 的桌边上做一个小记号，其中 x 为立方形的边长。这时再将立方体沿着这条桌边平移到记号的另一边，如图 18 所示。显然 A 至 B 的距离与立方体的那条空间对角线的长度相等，可以直接用尺测量出来。

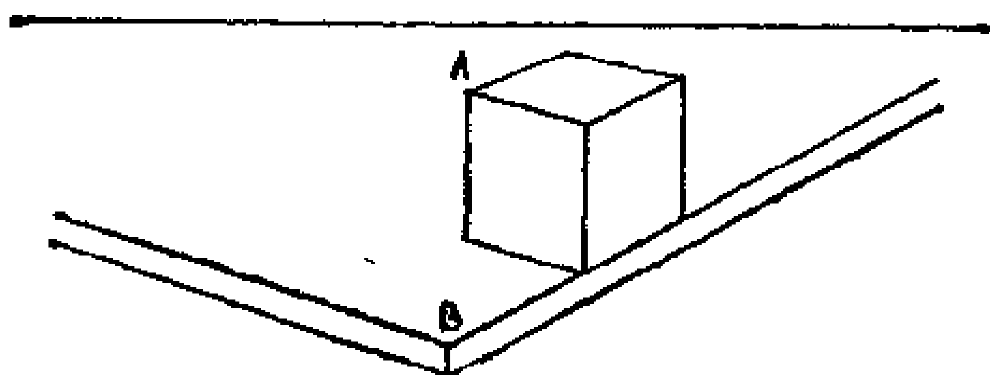
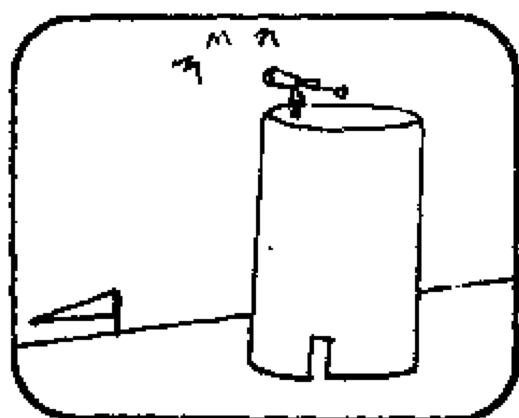


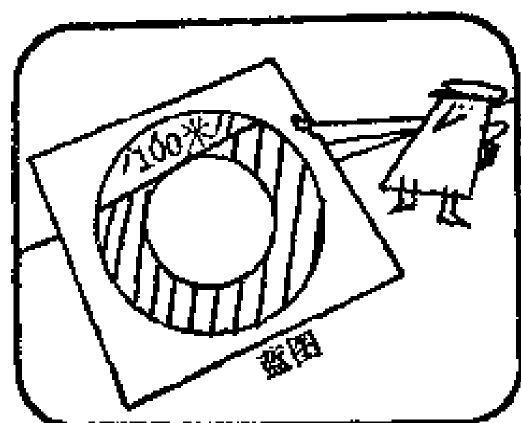
图 18

假如有一个很大的球，而你手中尺的长度只有该球直径的三分之二左右，你如何用尺测量出球的半径？最简单的方法是在球上涂一点烟灰或唇膏，然后把球放在地板上，贴近墙壁使墙上留下烟灰或唇膏的记号。此记号的高度即是球的半径，用尺很容易量出。你能否想出类似这样的巧妙方法从而测出锥体和棱锥体的高度？你如何用木匠的角尺精确测出一根圆管的半径？

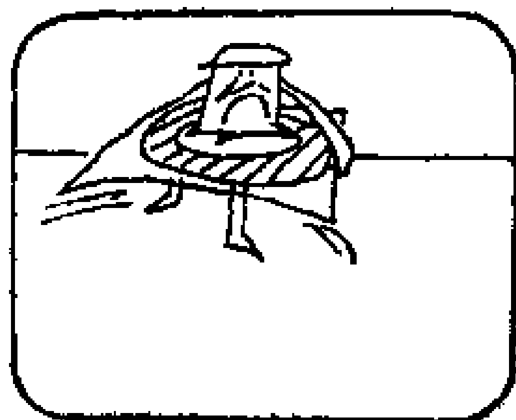
地毯难题



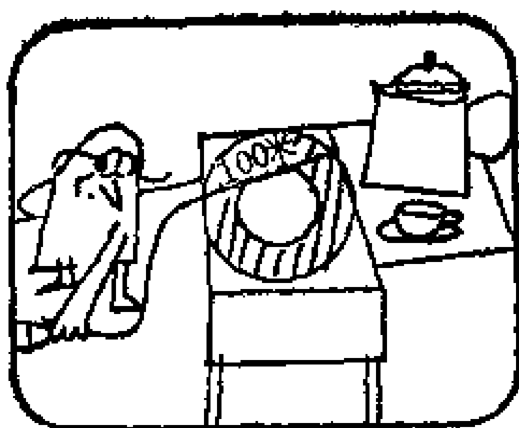
塔克地毯公司接到为一新建机场的环形走廊提供墙间地毯的要求。



当塔克先生看到设计图时，他冒起火来。唯一所标的尺寸是与内圆相切的弦长。

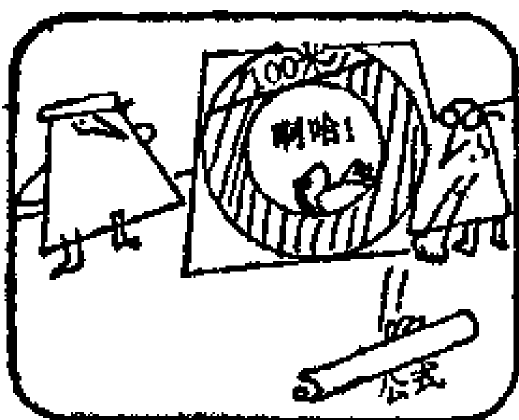


塔克先生：嗳呀，不知道两个圆间蓝色圆环的面积，如何能给他们定出地毯的价钱呢？我最好去找我的设计师夏普先生。



夏普先生是一个老练的几何学家。他并不太着急。

夏普先生：塔克先生，我所需知道的就是那条弦长。我只要代入一个公式就能求出那圆环的面积。



塔克先生面露惊讶之色，随即微笑起来。

塔克先生：谢谢你，夏普先生，但我对于你和你的公式都不需要！也不需知道这两个圆的面积。我马上就可告诉你结果。你知道塔克先生是怎样算出的吗？

惊人的定理

塔克先生作推理如下：我知道夏普先生是老练的几何学家，因此一定存在一个仅仅已知与内圆相切的弦长便能求出圆环面积的公式。换句话说，两个圆的半径可能是任何两个值面弦长仍为100米。

然后，塔克先生心中思忖：当内圆半径达到其最小值即为零时，其结果如何？这时圆环变成一个圆，其直径即为弦长100米，圆面积则为$\pi 50^2$约等于7,854平方米。假定存在着一个公式，此值必定也是两个圆之间的圆环面积。

概言之，任何圆环的面积等于以该圆环内最长直线为直径的圆的面积。应用圆面积公式很容易证明这一令人惊异的定理。

下面是一个类似的三维问题：仅知管子端面上的最长直线，求此厚壁管子的体积(图 19)。

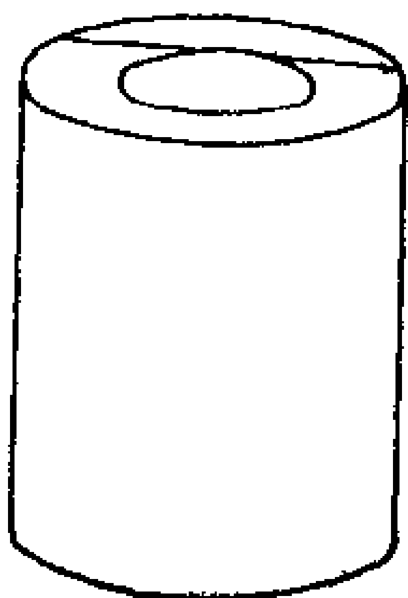


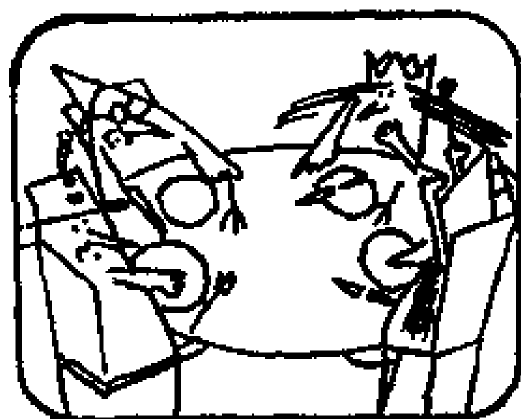
图 19

这条最长直线相当于上面所讲的切线，由此很快可以算出管子端面的环形面积。把所得结果乘上管子长度即为管子的体积。

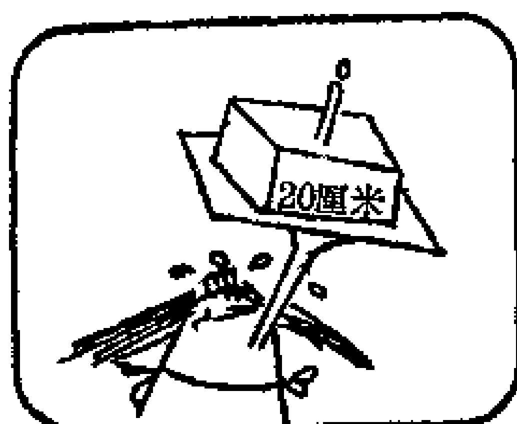
还有一个奇妙的问题，但其相似性没有那么明显。在一个球体中心笔直钻透一个 6 厘米长的圆柱形孔，问剩余部分的体积是多少？在毫无其他数据的情况下，求解似乎不大可能。然而，不必计算即可证明：球体剩下部分的体积总是等于以洞长为直径的球体体积。

如前所述，先假定此题可以求解，那么其结果就会脱颖而出。若此题有解，则球体钻孔后剩余部分的体积一定与孔的直径无关。于是，我们把孔的直径减少到下限即零，这时孔变为一条直线即为球体直径。因此，答案为$(4/3)\pi 3^3=36\pi$ 立方厘米。

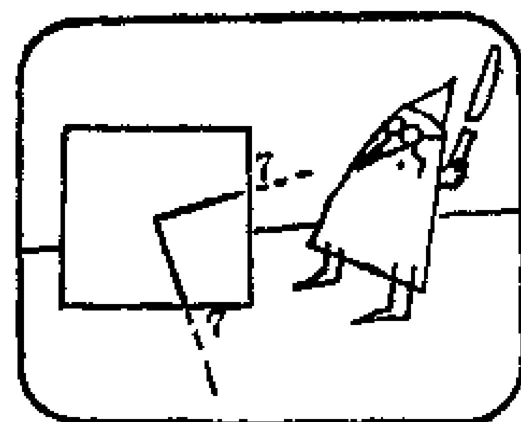
蛋糕的稀奇切法



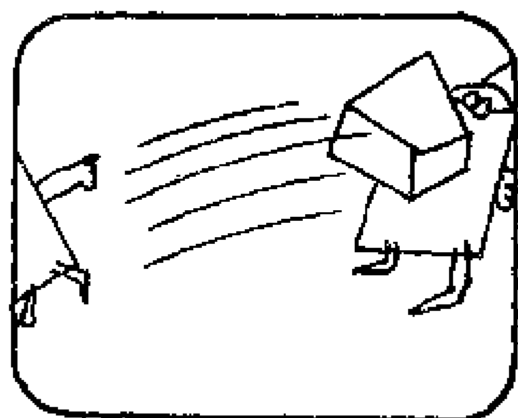
琼斯先生与夫人、十几岁的儿子及七岁的女儿苏珊共进晚餐。他们快吃完了。



那天正是苏珊的生日，琼斯夫人焙制了一个正方形蛋糕，长宽各20厘米，高5厘米，顶面和四个侧面覆盖着厚厚的糖衣。

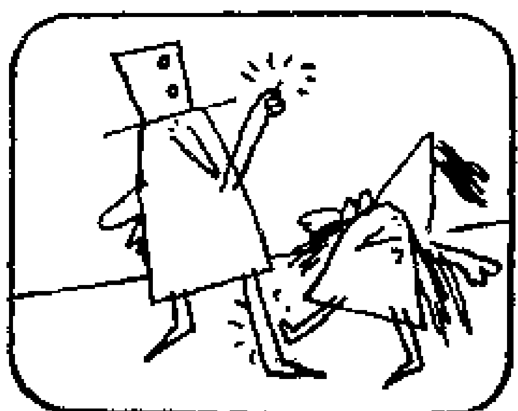


琼斯先生：多漂亮的蛋糕，亲爱的。对于我们大家来说份量也恰到好处。我先切下给苏珊的一份。因为她刚满七岁，我从蛋糕一角的七厘米处开始切，一直切至中心。



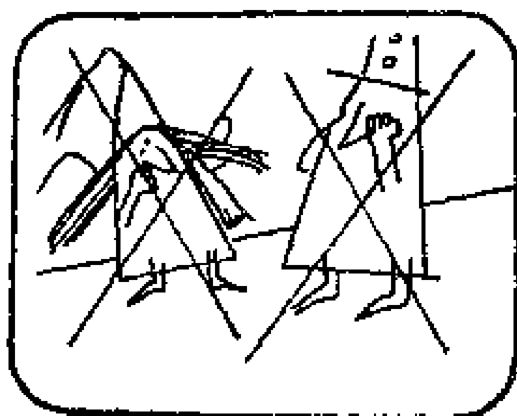
苏珊的这一块形状很怪，一会儿她就口出怨言了。

苏珊：爸，你给我的份量不足，不满四分之一。即使份量不少，糖衣也太少了。

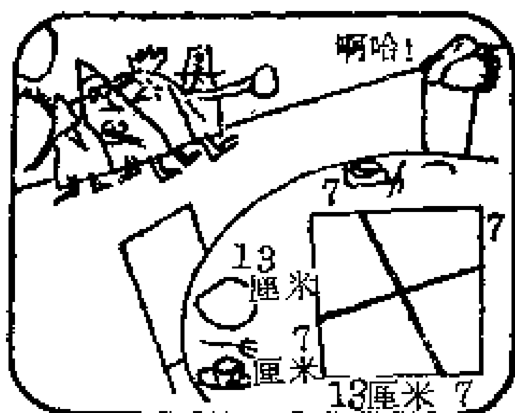


她哥哥不同意这种说法。

苏珊的哥哥：你真贪心，苏珊。我觉得爸爸给你的份量太多，你应该退回一点。



琼斯先生：嗯，你俩都错了。这一块恰好是整个蛋糕的四分之一，上面的糖衣也恰好占四分之一。你能解释琼斯先生为什么这样说的道理吗？



你只需要把两条切线经过蛋糕的中心点，延长到另一边。显而易见，这两条切线可把这块蛋糕分成四个全等的部分，对吗？

切 蛋 糕

根据这个切蛋糕问题很容易联系到所有其它的正多边形问题。举例说，如图 20 所示，假设有一块等边三角形蛋糕，从中心沿着一个 360/3＝120 度角的两边切下，切下的一块显然是整个蛋糕的三分之一，只需把一条虚线连成实线就一清二楚了。假设蛋糕是正五边形的，从中心沿着 360/5＝72 度角的两边切下，则可得到整个蛋糕的五分之一。假设蛋糕是正六边形的，从中心沿着 360/6＝60 度角的两边切下，则可得到整个蛋糕的六分之一。这适用于所有正多边形，即使角的度数并不象上述那样是一个整数，也同样成立。

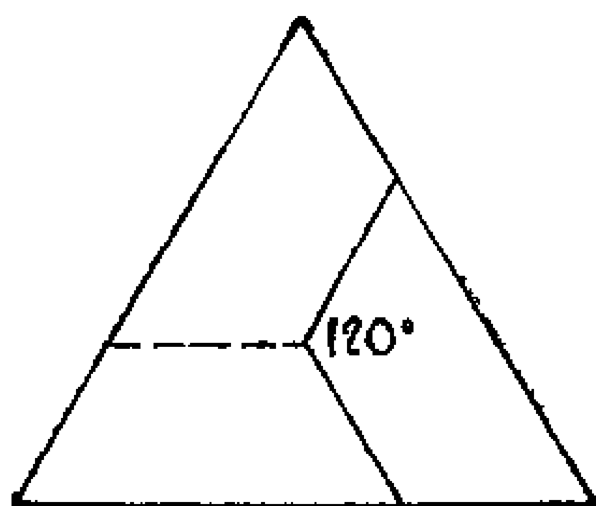


图 20

如图 21 所示，把一个正方形分成四个全等的部分，这是一个已达数十年之久的切分问题。你若把这四块纸板交给你的朋友们，请他们重新拼成一个正方形。他们一般会感到为难。他们解出这个难题后，再请他们用这四块拼成两个正方形。

这是一个花招。啊哈！你得想个巧法子才行。如图 22 所示，第二个正方形恰是第一个正方形中间的一个孔。孔的大小取决于原先那个正方形上所切的每一刀与边之间的夹角。若此

角为零，孔的面积亦为零；若此角为 45 度，则孔的面积达到最大值。

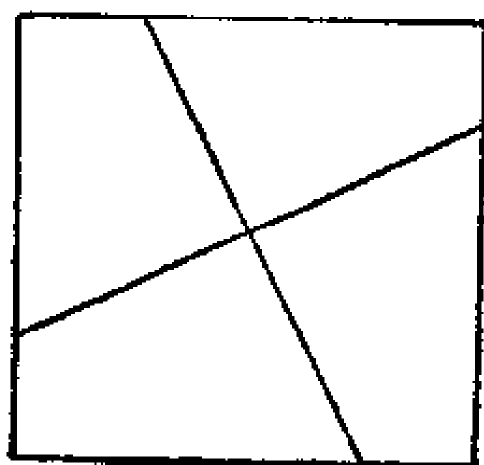


图 21

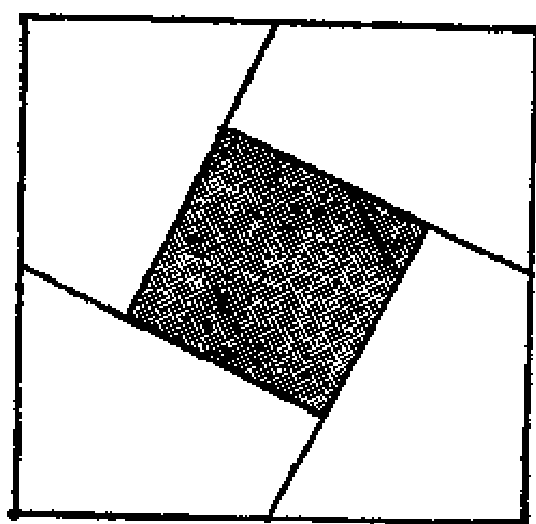


图 22

第三章　数　　字

算术可用多种方式来定义。这里只限于研究整数算术和对数字进行加、减、乘、除所得到的运算结果。

在人类社会的初级阶段(没有哪个人类学家知道是什么时候),古人逐渐发现可以对事物进行计数。无论计数的次序如何,结果总是一样。假如你用手指数两只羊,不管你先数哪一只,也不管先从拇指开始数起,还是从小指开始数,都没啥关系,其结果总是2。假如你数了两只后还有一只,那么结果总归是3。

要意识到象2+1=3那样的运算法则,必定要经过好多世纪的漫长进程。假如可以观看以往历史的动画片,我们也无法找到这样一个世纪,使得我们可以说:"这就是人类发现算术的时候"。儿童也是这样逐渐认识数目字的。小孩子可能会在某个时候第一次说出:"一加一等于二",但是,在用语言把它讲出来以前,小孩子早已意识到这句话的含意了。

所有正确的算术法则都由公理和数制定义导出。但这并不意味着我们光听一听就能识别算术陈述的真伪。假如有人断言:12,345,679×9等于111,111,111,那么在你用乘法证明它之前,可能是不会相信的。有些算术法则的陈述很简单,但含意却十分深奥,没有人知道这些法则究竟是否成立。哥德巴赫猜想即是一个有名的例子。每个偶数(大于2)是否是两个素数之和?至今既未证明这是"对"的,也未发现一个反例。

本章介绍的各种有关计数的简单问题,只要思路对头,这些问题都可迎刃而解。我们所选编的一些题目,尽管是最基本的,但是可以从中引出一些重要的概念和技巧,并可导出更深奥的

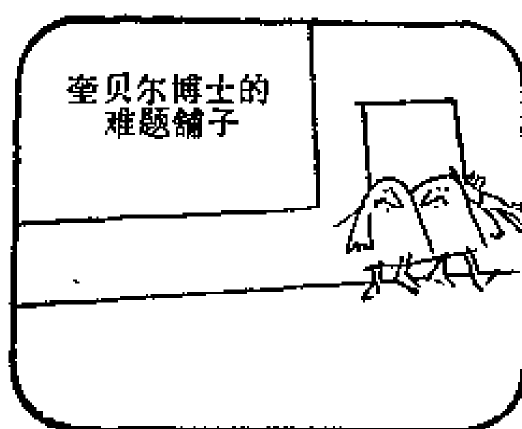
“高等算术”，也就是现在所谓的“数论”。例如，“掰开的唱片”一节，可引出丢番图分析，从而求出方程的整数解。“多余的一个”一节将涉及十分重要的最小公倍数的概念，并在重要的“中国余数定理”基础上介绍一种戏法。

“对分法”在计算机检索和分类理论方面十分重要，它是猜测海伦未曾登记的电话号码技术基础，由此可以导出二进制记数法。作为许多艰深的数论证明基础的“鸽笼原理”，是在证明下列两个有趣的题目的过程中产生的：一个是钞票问题，另一个是头发根数问题。由于存在两个整数“互素”（没有公因子）这一情况，所以就可以很快地证明手表的时针、分针和秒针除了在十二点钟以外永远不会重合在一起——该法则通常是用繁琐的代数法来证明的。

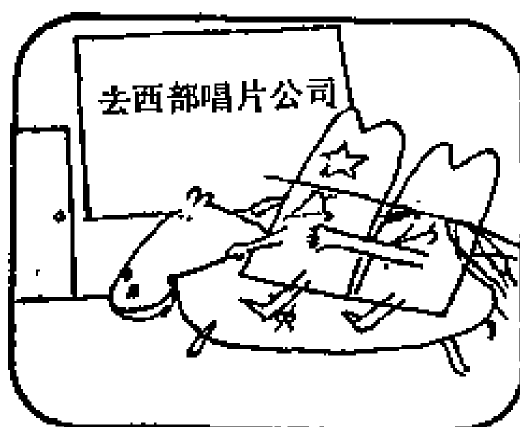
瓶子计数问题用模数运算颇容易解决，由此导出的“约瑟夫斯问题”是个经典的数字问题，可用一副纸牌巧妙地加以模仿。

本章选编的一些难题，虽然在数学家看来很平常，但这些问题却为研究数论的一些崭新的分支开拓了道路。这些难题定能使你体会到在所有演绎系统中，那个最古老的演绎系统（即处理我们所熟悉的数目字的符号系统）该有多么丰富多彩。

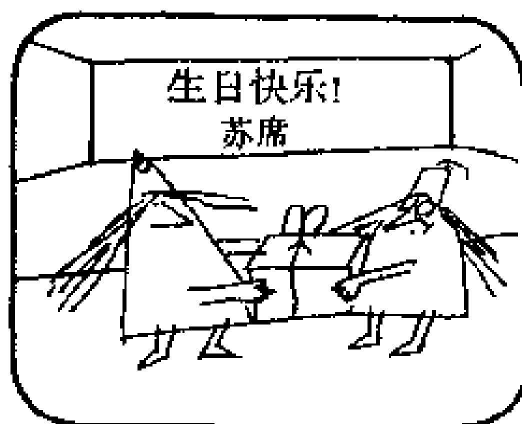
掰开的唱片



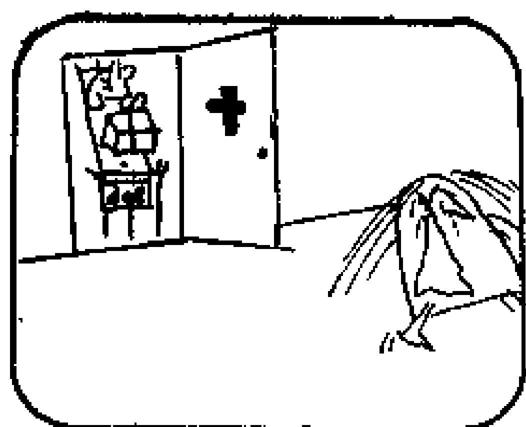
鲍勃和海伦都热衷于解难题，他们的最大乐趣就是彼此用难题来难住对方和难倒他们的朋友。



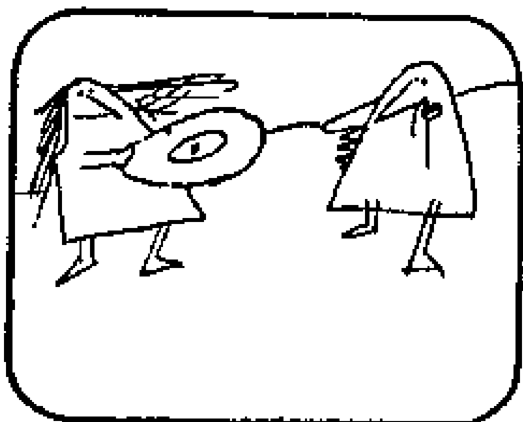
鲍勃和海伦经过一家唱片商店。鲍勃说，你那些西部田园音乐唱片还在吗？



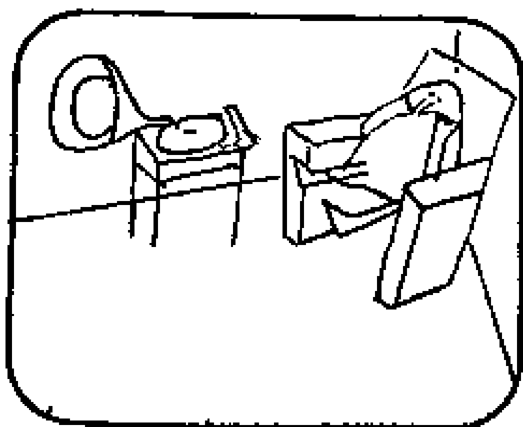
海伦：没有了。我已经把一半唱片和一张唱片的一半送给了苏席。



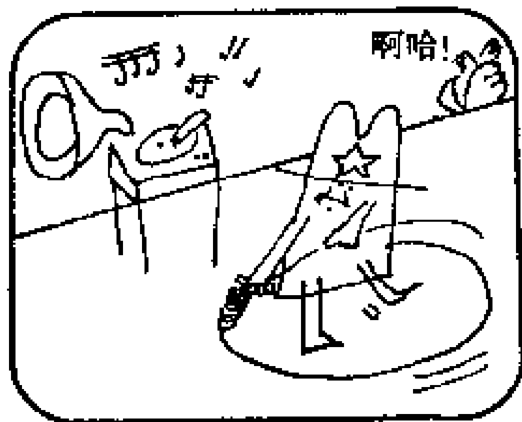
海伦：然后我又把剩下的一半唱片和一张唱片的一半送给了乔。



海伦：我现在只剩下一张唱片了，假如你能说出我原来有几张西部田园音乐唱片，那么这一张就送给你。



鲍勃给弄糊涂了，因为他怎么也弄不懂半张唱片还有什么用处。



突然他叫了一声。啊哈！他明白了，一张唱片也没有掰开过。他答出了这一难题，她就把最后一张唱片送给了他。鲍勃到底有什么诀窍呢？

分整为半

你有没有上过当，以为某物的一半加 1/2 就不可能是一个整数？假如是这样的话，也许你会从掰开唱片的角度来考虑解决这个问题，那可就立即误入歧途了。啊哈！窍门在于看出：数量为奇数的唱片，取其一半再加上半张唱片，一定是个整数。

因为海伦在最后一次送礼后只剩下了一张唱片，所以在她把唱片送给乔之前，一定有三张唱片。3 的一半为 $1\frac{1}{2}$，而 $1\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=2$，所以海伦最后一次送礼是 2 张唱片，末了自己留有一张完整的唱片。现在倒过来往前算就很简单，她原来一定有七张唱片，给了苏席四张。

当然，这个问题可用代数方法求解。列出这个问题的方程式，然后求解。这是初等代数的一个很好的习题。不过令人惊奇的是，这么简单的小问题却要列出十分复杂的方程式：

$$x-\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)-\left[\frac{x-\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)}{2}+\frac{1}{2}\right]=1$$

改变一下参数，就很容易构成同类的新问题。例如，假使海伦遵循同样的赠送方式，每次把唱片总数的一半加半张唱片送给别人，但一共赠送三次而不是两次，最后全部送完，一张不留。那么她原来共有几张唱片呢？你会很有趣地发现，答案同上例完全一样，起初共有七张唱片！第三次送礼是把最后一张唱片也送给人了。假如按这样的依次“分半”办法送礼四次，最后还留下一张唱片，那么原来共有几张唱片呢？若送礼五次呢？这些数产生怎样的一个数列？

每次赠送的分数量也可以变化。假如海伦每次送掉手中唱片的三分之一加一张唱片的三分之一，送了两次以后发现还剩

下三张唱片，那么她原来共有几张唱片呢？如果她按这种“三等分”办法送礼三次，最后自己还留下三张唱片，此时是否有解？你会发现，改变参数——赠送次数、分数量和最后留存的整张唱片数——在不掰开唱片的意义上，并非总是有解。那么，在什么样的限定条件下既能解决这类问题又不需掰开一张唱片呢？

同样，并不需要在每次赠送时的分数量完全一样。例如，在下面这个难题里，分数量是不同的：

某孩爱好养金鱼，他决定把他的金鱼全部出售了，并分以下五次卖出：

第一次卖出全部金鱼的一半加二分之一条金鱼；

第二次卖出剩余金鱼的三分之一加三分之一条金鱼；

第三次卖出剩余金鱼的四分之一加四分之一条金鱼；

第四次卖出剩余金鱼的五分之一加五分之一条金鱼；

现在还剩下 11 条金鱼。当然，在出售时金鱼是不能切开或者有任何破损的。他原来共有多少条金鱼？答案是 59 条。但这个问题不象前面一些题目那样容易解答，请你试试看，能否解答出来。

下面是一个与之大同小异的题目。

某女士钱包里有一定数量的整元钞票，身边没带零钱。

1．她花一半钞票买了一顶帽子，给了店门口的乞丐一元钱；

2．用膳花去了余下钱的一半，另给侍者两元钱小费；

3．她用余下钱的一半买了一本书，回家前到鸡尾酒馆去了一次，喝酒花了三元钱；

现在她还剩下一张一元钱的钞票。假设她没有把整元的钞票兑开过，那么她原来有多少钱？答案附于书末。

值得注意的是，在上述各例中都已知最后剩余的数目。若是不知道这一数目，问题一般也是能够解决的，不过可能需要在

整数范围解不定方程。最有名的一个类似问题曾作为美国作家本·艾姆斯·威廉斯写的一个小故事的根据，这个故事刊于1926年10月9日的《周末晚报》上。

这个故事名为“椰子”，说的是五个男人和一只猴子因翻船而来到一个小岛上。第一天，他们花了一天功夫来采集椰子。夜里，有一个人醒了，他决定取走自己的一份椰子。于是他把椰子分成五堆，结果还剩下一只椰子，他便把它分给了猴子。然后他把自己的一份藏好，就回去睡觉了。

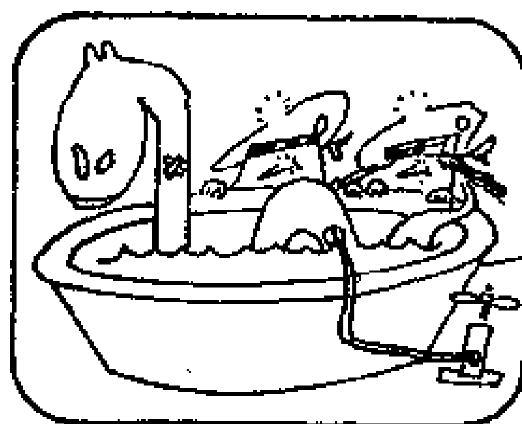
过了一会儿，第二个人醒了，也干了这样的事。他把椰子分成五堆以后，还剩一只，便把这只椰子留给了猴子。然后他把自己的一份藏起来，也回去睡觉了。以后，第三个人、第四个人和第五个人一点不差地全都这样做了。第二天早晨他们都起身之后，把剩下的椰子分成五份，这次就没有剩余的椰子了。

他们原来采集了多少椰子？

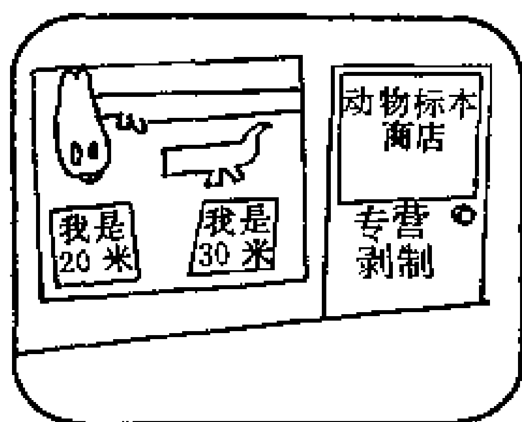
这个问题有无数个答案，最小的答数是3121。这不是一个简单的题目。

在讲到从一堆椰子中取出份额的问题时，这里还有一个“看谁答得快”的题目，一瞬间你可能会觉得难得使你愣住：假如有25只椰子堆积在丛林里一块空地上，一只猴子偷剩7只，那么还存几只椰子？答案不是18只。

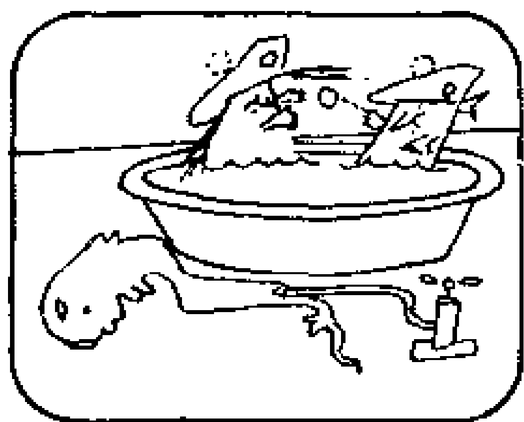
海峡怪兽



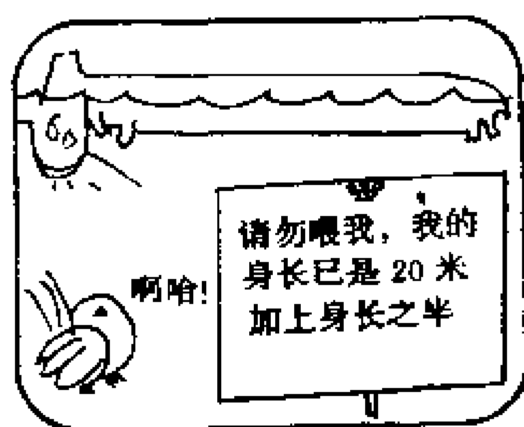
鲍勃：如果海峡怪兽的身长是20米与其身长之半的和，那么它该有多长？



海伦：让我想想看。二十与二十的一半为三十，所以它有30米长。



鲍勃：海伦，我真对你感到诧异，你的回答是自相矛盾的。它怎么既是20米长，又是30米长呢？



海伦：是呀。这句话的意思只能是：总长为身长之半加上 20 米。现在问题够清楚了，你能说出怪兽有多长吗？

身长之半

关于这个问题，鲍勃是这样说的：怪兽的身长等于 20 米与该怪兽身长一半的和。设想把怪兽分成两段相等的长度（称每段长度为“半长”）。如果怪兽的身长为其中一个“半长”与 20 米之和，那么 20 米也一定是另一个“半长”，所以总长是 40 米。

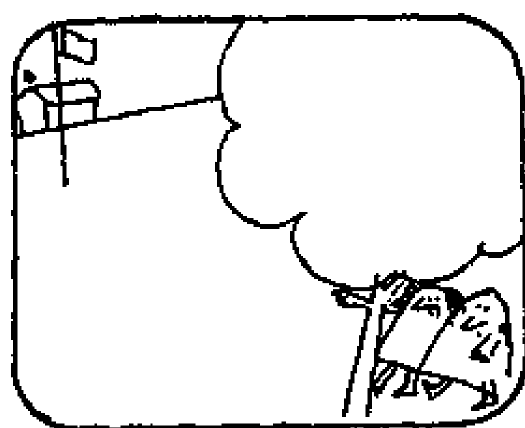
这个问题的代数方程很简单，若设 x 为总长，则

$$x=20+\frac{x}{2}$$

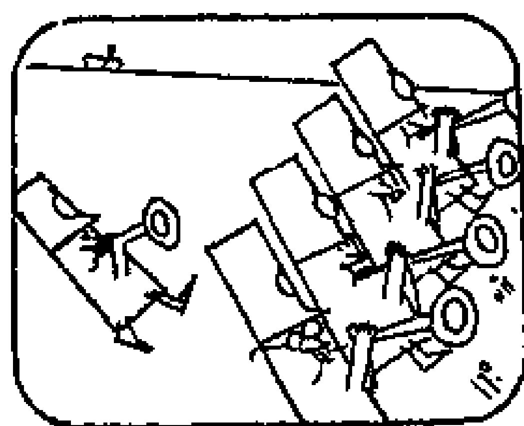
既然你已经知道这一解答竟如此简单，那么下面类似的问题你能立即回答吗？在天平某一边秤盘上的一块砖头同该天平另一边秤盘上的 3/4 块砖头与 3/4 公斤砝码完全平衡，这块砖头的重量是多少？

海峡怪兽问题表明，在回答之前确切地理解题意是十分重要的。如果你对问题的最初解释导致一个矛盾的结果，那么，或者是这个问题无解，或者是你没有正确地理解这个问题，两者必居其一。

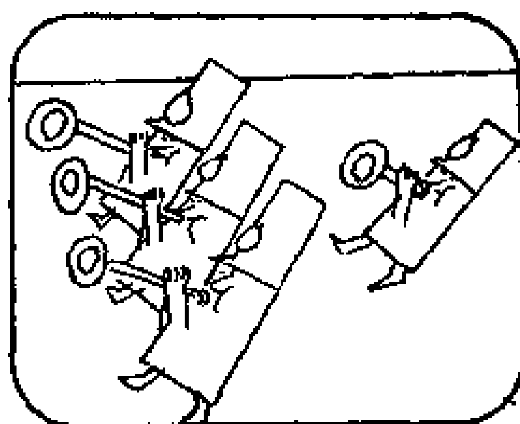
多余的一个



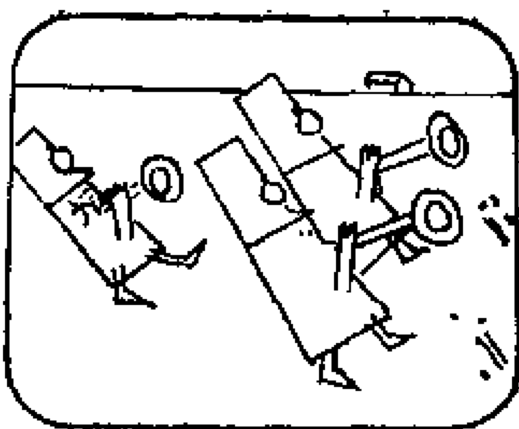
在鲍勃和海伦穿过公园的时候，看见尼克松中学的乐队正在排练游行队伍。



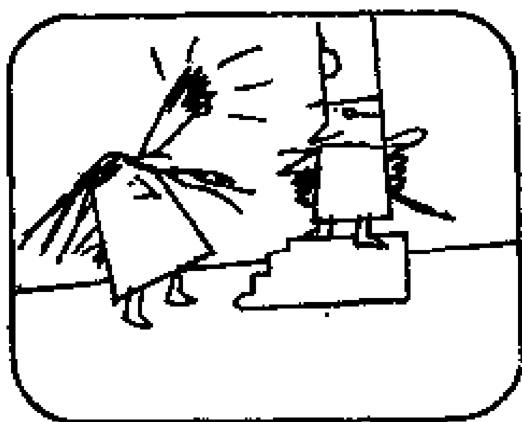
在乐队行进时，四个人一排，剩有一个男生，可怜的小斯皮罗最后压队，乐队指挥为此很伤脑筋。



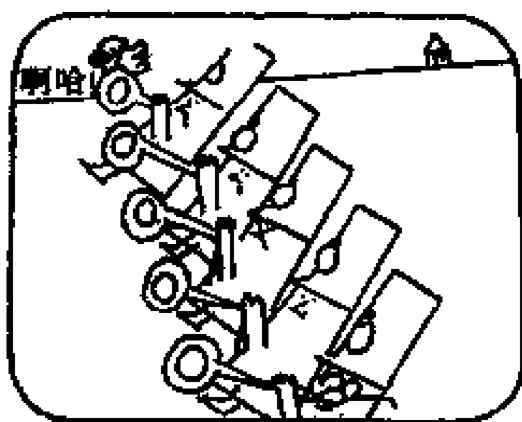
为不使单独一名乐队队员留在队伍的末尾，指挥让乐队三人一排行进，但是斯皮罗仍然孤独一人在最后一排。



即使乐队二人一排行进，情况还是如此。



虽然这不关海伦什么事，但她还是向指挥走了过去。海伦说：我可以提个建议吗？鲍勃：不，小姐，请走吧，勿打扰我。



海伦：好吧，不过，我还是要告诉你，应该让乐队五人一排行进。鲍勃说：亲爱的，我正好也想要五人一排试试看。

当乐队以五人一排行进时，每排都排足了人，斯皮罗不再单独一人压队了。这个乐队到底有多少队员呢？

从余数得全数

海伦很快地把乐队人数数了一遍，发现乐队人数刚好是5的一个倍数。若是不看整个乐队你能确定这乐队的人数吗？

啊哈！是否是这样：总人数除以2、3和4以后，还有一个以斯皮罗为象征的余数1。具备这一特征的最小数字，显然比2、

3、4 的最小公倍数大 1。这三个除数的最小公倍数为 12。任何一个比 12 的倍数大 1 的数，被 2、3 和 4 除了以后都应该有一个余数 1。

当乐队以五人一排行进时，这余数就没有了。因此，总人数还必须恰好被 5 除尽。这个问题的解应该是下列数列中的 5 的倍数：13, 25, 37, 49, 61, 73, 85, 97, 109, 121, 133, 145, ……

对一个中学乐队来说，145 人太多了，所以尼克松中学的乐队人数，应当是 85 人或者 25 人。尚无充分的信息足以在这两个答案中作出抉择。

这个问题的一种变型，同前面的情况一样，只是乐队每排以 2 人、3 人和 4 人行进，但最后一排总缺少 1 人。此时乐队该有多少人呢？现在我们必须写出一列数，这些数要比 12 的倍数小 1，且恰好被 5 除尽。这些数是：35, 95, 155, ……

美国编写趣味难题的萨姆·洛伊德想出了下面这道更难的同类题目。在爱尔兰守神节那天，许多爱尔兰人准备在纽约城举行每年一度的庆祝游行。格兰德·马歇尔曾想把队伍每排排成 10 人、9 人、8 人、7 人、6 人、5 人、4 人、3 人和 2 人，但每次最后的一排总是缺少一人。那些人想这个位置大概是给数月前死去的凯西的鬼魂占据了。最后，格兰德·马歇尔恼火了，叫大家排成一列纵队前进。假定人数不超过 7000 人，那么究竟有多少人？这是一道寻找一组数字的最小公倍数的很好习题。该题的最小公倍数为 2520。如果把凯西从人数里减去，便得到答案：2519。

如果在每次做除法以后得到一个不同的余数，问题似乎更难了，但是亦不尽然。例如，让我们考虑这样一个溯源于七世纪印度算术书的经典趣味难题。

某女士手里拎了一篮鸡蛋，从她身边奔跑而过的一匹惊马吓了她一大跳，结果把篮里的鸡蛋全打碎了。有人问她篮里原

来装了多少只鸡蛋，她说自己的算术较差，不过记得当她把鸡蛋两个一数、三个一数、四个一数、五个一数时，余数分别为1、2、3和4只鸡蛋。请问篮里原来有多少只鸡蛋？

这个巧妙的问题初看起来比前面几道题来得难，而实际上同上面第二题的前一部分完全相同，因为每次的余数总是比除数小1。所以同上面的例题一样，只要找出最小公倍数然后减1，就可得到答案了。

当所有余数跟所有除数没有一个一致的关系时，问题确实变得较复杂了。下面叙述的是类似这类问题的一个巧妙的用袖珍计算器变的戏法。你的朋友们定会感到神秘而新奇。

魔术师背对观众坐在椅子里。有人随便想了一个不大于1000的数，让这人把该数除以7并说出余数；然后把原来的数除以11并说出余数；最后，再把原来的数除以13并再次说出余数。

为了把戏法变得快一些，观众里而一个人用一个袖珍计算器来求出这三个余数。利用下而这种算法就很容易地把余数算出来：先作除法，将商的整数部分减掉，然后再将结果乘以原来的除数。若把此乘积园整成一个与它最接近的整数，即可得到所需要的余数。

魔术师只消知道这三个余数，就能猜出观众选择的那个数。他是用自已的袖珍计算器和下面这个秘密公式解出的，他将这个公式写在一个小纸片上，然后把它贴在计算器的表面上。

$$\frac{715a+364b+924c}{1001}$$

公式里的a、b和c是依观众说出先后为序的三个余数，观众选择的那个数就是用这个公式计算以后得出的余数。

这个似乎不可思议的公式是这样得出的*：第一个系数是比 a 的整数倍大 1 的 bc 的最小倍数。找出这个数是有一定的规则可循的，但当除数很小，例如在本题中；用观察的办法就很容易得出这个数。只要顺着 bc 的倍数往上推算 (143, 286, 429, 572, 715, ……)，直至找到那个被 a 除而余 1 的倍数为止。在上题中，$a=7$，因此这个系数应当是 715。

用同样方法可以求出另外两个系数。第二个系数是比 b 的倍数大 1 且为 ac 的最小倍数，第三个系数是比 c 的倍数大 1 且为 ab 的最小倍数。该公式中横线下面的那个数即为 $a\times b\times c$。你可以用这个方法对任意一组除数编制出一个神秘公式，只要这些除数互为质数(没有公约数)即可，而这些除数本身不必都是质数，如在该例中那样。

一般公式的证明要涉及到求模运算，而且要对著名的“中国余数定理”有所了解。该定理是最有用的算术定理之一，它在许多深奥的证明以及解算科学问题方面起着重要作用。

作为一个练习题，试就与这戏法类同、但较简单的问题得出一个秘密公式。这个问题可溯源于古代一世纪的中国数学家孙子(Sun-tsu)，“中国余数定理”即以他命名的。选择的数以 1～105 为限，除数是 3、5 和 7。在这种情况下的秘密公式很简单，稍熟练一些的话，甚至可以用心算把它算出来。

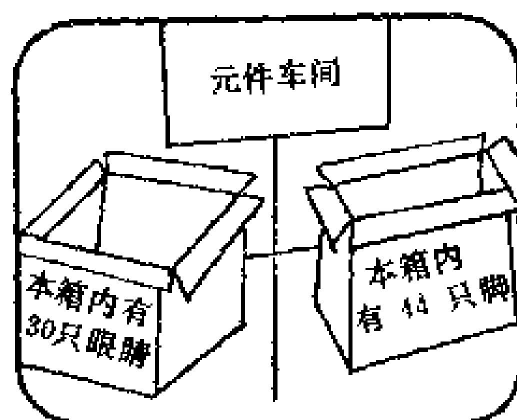
---

* 在计算该公式的系数时，把 a, b, c 分别作为三个除数，而用袖珍计算器作“表演”时，用 a, b, c 分别代以三个余数——译注

眼睛和脚



鲍勃和海伦在离开公园前，走过动物园，他们看见围栏里有一群长颈鹿和鸵鸟混在一起。

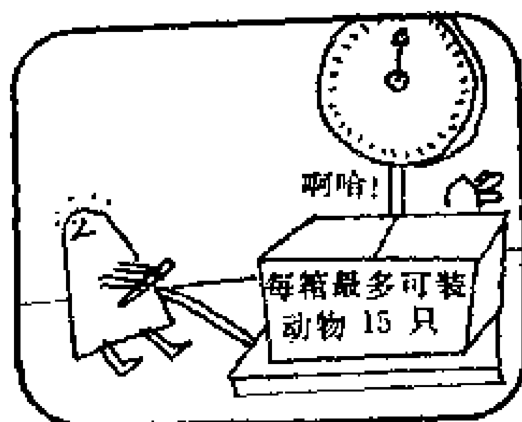


他俩离开动物园后，鲍勃向海伦提了一个问题。

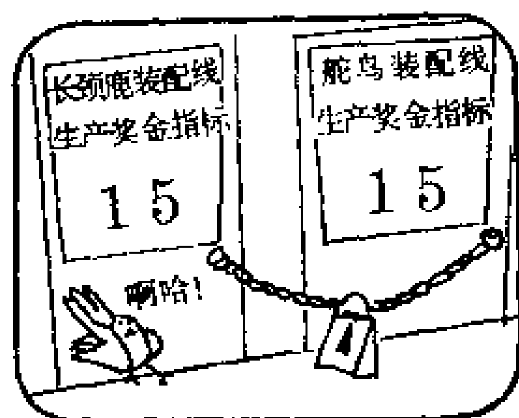
鲍勃：你数过长颈鹿和鸵鸟各有多少只吗？

海伦：没数过。到底它们有多少只呢？

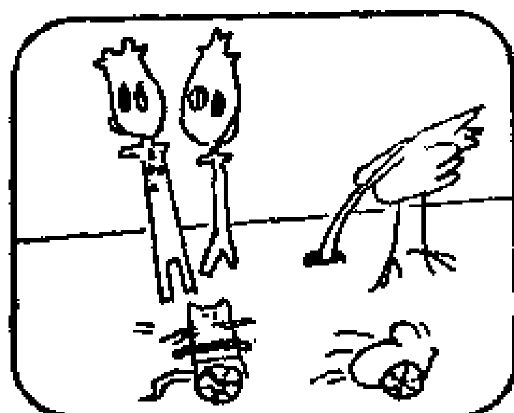
鲍勃：你应先算出它们的总数来。它们总共有30只眼睛和44只脚。



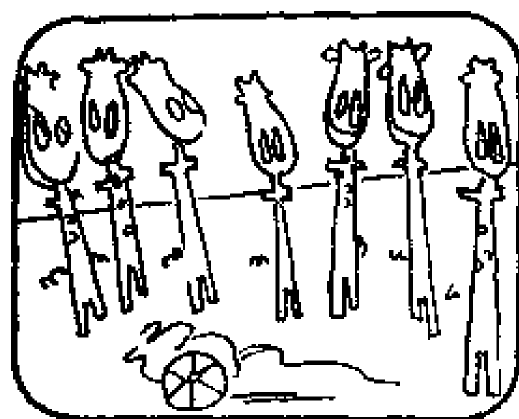
海伦先叫一声："啊哈！"，我明白了，30只眼睛表示有15只动物。



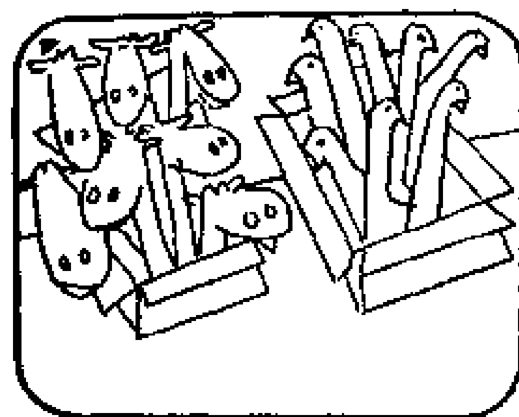
海伦：现在我能够列出所有的可能性：从零只鸵鸟、15只长颈鹿到15只鸵鸟、零只长颈鹿等15种可能性。可是我毋需这样做就能解决这个问题。



海伦：假定所有这15只动物都以两脚站地，那么地上应该有30只脚。



海伦：可是你说过总共有44只脚呀！所以，还应该有14只长颈鹿的脚悬空着，由此可知，有7只长颈鹿，对吧？



鲍勃：对的。如有7只长颈鹿，则有8只鸵鸟。

两脚动物与四脚动物

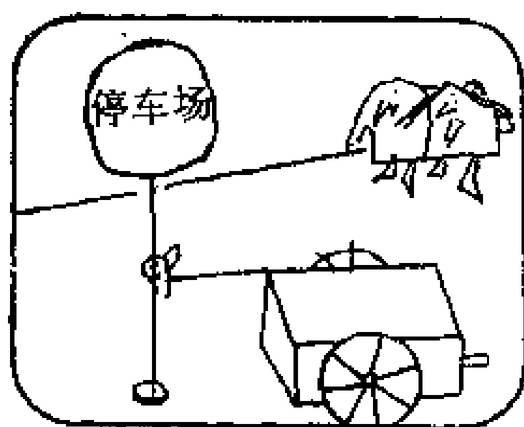
解决这个问题的诀窍，海伦是容易理解的，然而你可能希望用代数方法来检验一下答案，那么，你的答案是否一致呢？

下面是一道与上题相仿而有趣的难题，但需要用另一种窍门来解。在一个小马戏团里有许多匹马和骑手，共有50只脚和18个头。除此以外，马戏团里还有一些丛林动物，它们总共有11个头和20只脚。四只脚的丛林动物的数量为两只脚的人的数量的两倍，请问马戏团里有多少匹马，有多少名骑手，有多少只丛林动物？

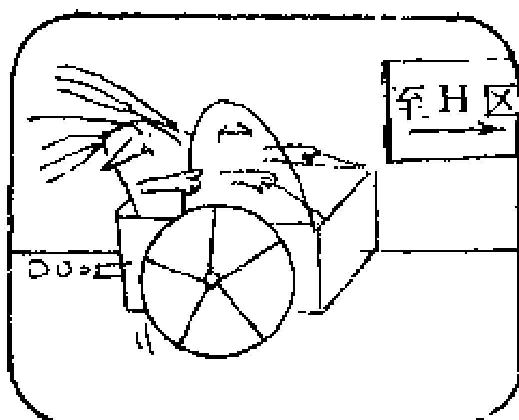
你不难确定，那里有7匹马和11名骑手，但当你试图求解丛林动物的数目时，你会惊奇地发现你得到的是一个负数。

在寻找书末的答案之前，你能想通这个问题吗？

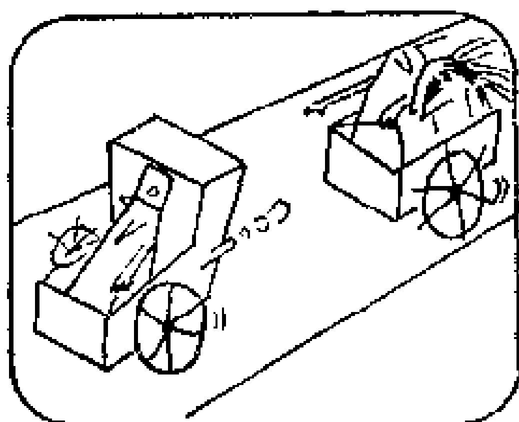
撞 车 事 件



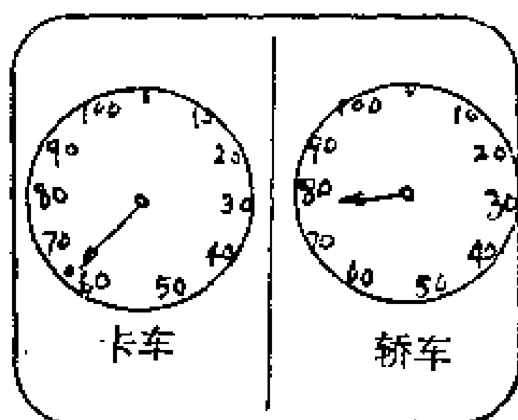
当他们走到鲍勃的赛车旁边时，鲍勃表示愿意开车送海伦回她父母的新居去。



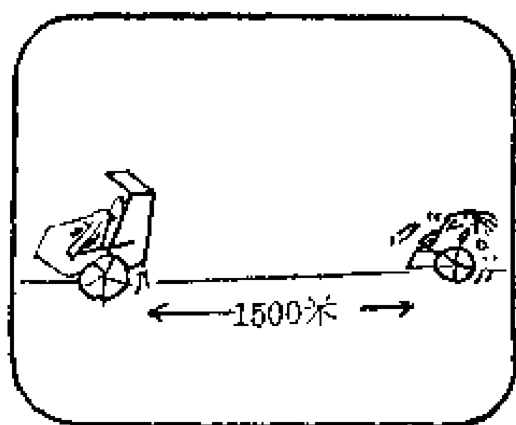
在快车道上，鲍勃向海伦提了一个巧妙的问题。



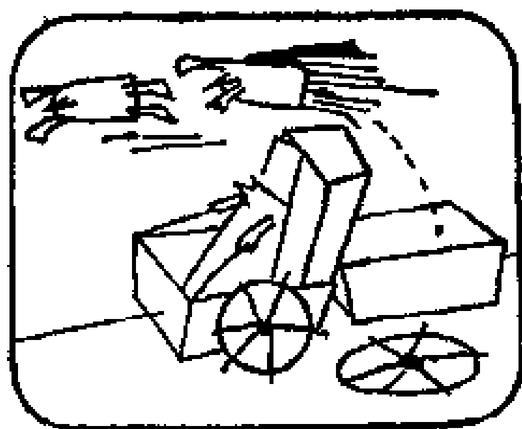
鲍勃：看前面的那辆大卡车，开得真快，但是我可以赶上它。



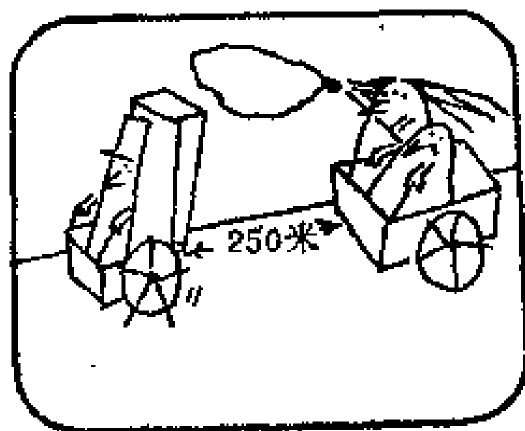
鲍勃：现假设它以每小时 65 公里的恒速前进，而我用 80 公里的恒速追赶。



鲍勃：假设我们现在正好在它后面 1500 米。



鲍勃：因此，假如我们保持车速不变，也不去超他的车，那么就肯定会同它相撞。海伦，请你告诉我，在相撞前的一分钟，我们与它相距多远？



海伦：那很简单，在相撞前一分钟，我们与它相距250米。

海伦答对了，你能否解释一下，她怎么会那样快就答出了呢？

倒 算 法

这个问题虽然可以用代数方法硬算出来，但海伦用了窍门，就用不着代数方法了。她知道，从时间上倒过来考虑这情景，马上就可以得出答案。

卡车以每小时65公里的恒速行驶，而鲍勃则以每小时80公里的恒速前进，其相对于卡车的速度为每小时15公里(或者说每小时15000米)，即每分钟250米。因此，在相撞前一分钟，轿车落后于卡车250米。

我们知道，鲍勃提出此问题时，轿车落后于卡车1.5公里，其实此条件对解这个问题是多余的，不管这两辆车子之间的初始距离是多少，答案只有一个！

下面两道典型的智力难题，采用同样的方法，即把时间倒过来这个窍门解的。

1．两艘宇宙飞船径直相向飞行，一艘飞船的速度为每分钟8公里，另一艘为每分钟12公里。假设它们正好相距5000公里，那么在相撞前一分钟，它们之间的距离是多少？

同样，这里两艘飞船起初相隔的距离与这个问题没有什么关系。好多人会上这个当，认为这个问题一定先要考虑飞船的初始位置，然后顺着时间推算才能解出。当然，简捷的解法是看出：这两艘飞船正以每分钟20公里的速度相互接近，所以在发生碰撞前一分钟，它们必须相距20公里。

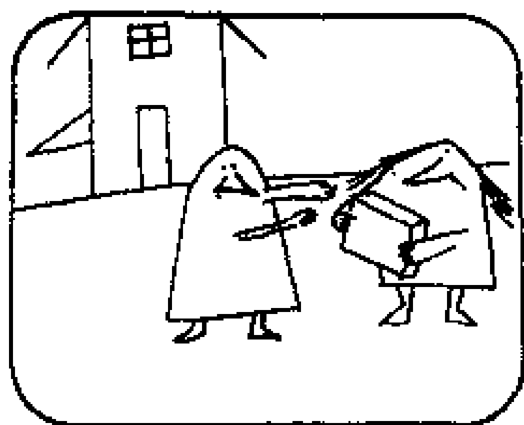
2．有一个分子生物学家研究出了一种奇怪的胞子，每个胞子每小时分裂成三个胞子，而每个新胞子同原来的胞子一样大小。一小时以后，这三个新胞子中的每一个又分裂成三个，这一过程就如此连续不断地进行下去。

一天正午，生物学家在一容器里放入一个胞子。到了午夜，胞子正好充满了容器。请问，在什么时候容器内正好装满三分之一？

同前面一样，解法的诀窍是倒算。很清楚，在晚上十一点钟的时候（即午夜前一小时），容器内装满三分之一。

现在我们用上面这道题的新的而有趣的变型来测验一下找窍门的本领。条件同前面的基本一样，只是生物学家在正午把三个胞子（而不是一个胞子）放在同样一个容器里，那么胞子将在什么时候充满容器？答案附于书末。

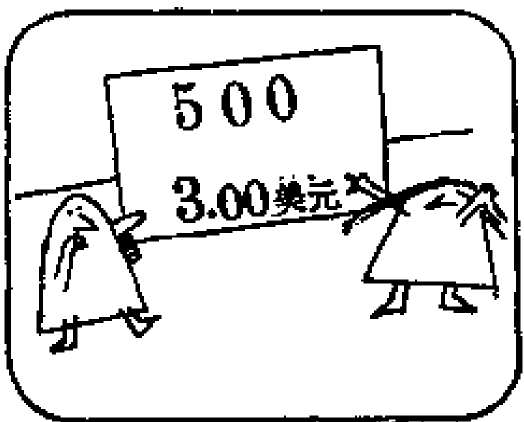
神秘的商品



当他们到达海伦家里时，她交给她父亲一包东西。

海伦：爸爸，这是您要在五金店里买的东西。

布朗先生：谢谢，女儿，这要多少钱？



海伦：五百花了三元钱。

布朗先生：三元钱？就是说一元钱一片。

海伦：是的，爸爸。

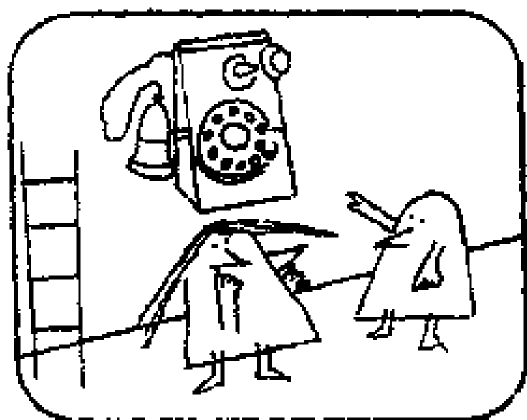
海伦究竟买了什么东西？

一个号数花费一元

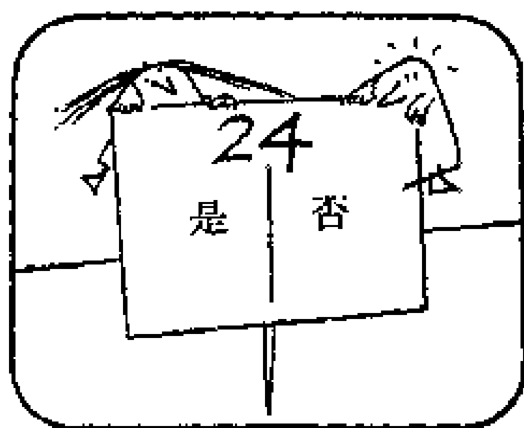
这里的奥妙是须看出“500”可以有两种解释：既可以把它作为一个数，也可以把它当作号数(号码)。假如一个号数要一元钱，那么三个号数就要三元钱。海伦买了三个住宅号码牌。

从这个问题你应记取这样一点，即在寻求问题解答时，必须仔细地分析一下该问题所给予的信息。

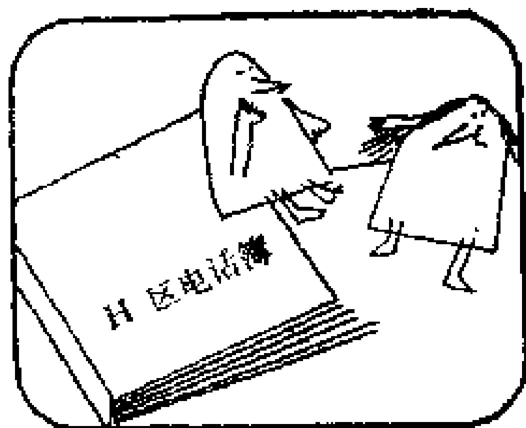
未列入电话簿的电话号码



鲍勃：顺便提一下，海伦，你还没有把你新居的电话号码告诉我，这个电话号码还未列入电话簿。

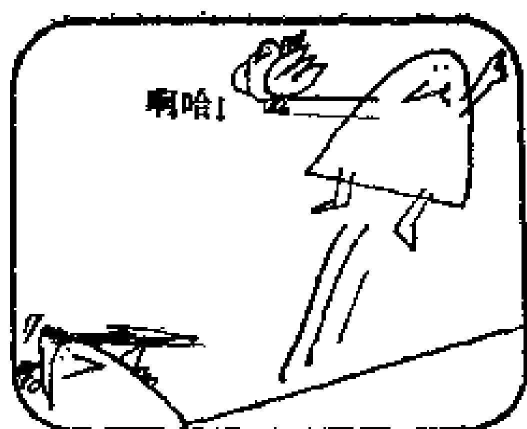


海伦：我们还不想把它告诉人家。不过，你可以就电话号码提24个问题，我用是或非来回答。



鲍勃：海伦，可能的电话号码差不多有1,000万个呀，只准问24次，我怎么能猜得出呢？

海伦：好了，别多啰嗦，还是多想想吧，我知道你能猜得出。



鲍勃没有花多长时间就想出了一个简便的方法，这个方法用24个或不到24个问题就可以确定任何人的7位电话号码。假如你能够想出来，也不妨请朋友们试试。

对　分　法

鲍勃知道，用是或非这种提问形式来辨别某个"集合"中的一个特定元素。最有效的办法如下：假如集合包含偶数个元素，则可以把它分成几个相等的部分，而每个部分有同样数量的元素；假如集合包含奇数个元素，则把它分成两部分时，应使这两部分的元素个数尽量近于相等。然后就问，这两部分中哪一部分夹有我们要找的元素。在得到回答以后，我们取所指的那部分，再重复上述的步序。最后，只留下原来那集合当中的一个元素，这个元素正好是我们要找的。

很明显，问一次可以专门辨别出一个2元组中的一个元素。四元组问二次即可，八元组问三次，十六元组问四次，一般地说，问n次，则可辨别2^n元组里的一个选定的元素。

对于上述电话号码问题，问24次就完全可以猜出任意一个不大于$2^{24}=16777216$的数，这个数比9999999大，即以七位数字写成的最大的电话号码。但问23次还不够，因为$2^{23}=8388608$，小于有些电话号码。

因而，鲍勃第一次问的是："这个数是否大于5百万？"对这个问题的回答立即将可能的情况压缩一半。这样连续问下去，在问了24次（或者不满24次）以后，肯定就能找到正确的电话号码。

大多数人都觉得难以相信的是，只问24次就能在一到一千六百万之间辨别出任意一个数字。这是因为他们不知道在倍增序列中数的增大有多快。正是由于这样快地增大，所以才能解释为什么用是或否的问答形式能够方便地猜出某人所想的东西——甚至可让这个人想的是任何一件世界上存在的东西。假如你善于运用对分法（比如问“有生命的还是无生命的？”“是动物还是植物？”等诸如此类的问题），一般问上20次或者不到20次就能猜出，譬如，某人在想“自由女神”头上那顶王冠！

上面介绍的问24次猜测电话号码的那些步序，就是计算机科学家称作“对分法”的步序。一种以对分为基础的巧妙的卜算戏法，运用了图1那样的六张卡片。把这套卡片给某人看，请他在1到63范围内随便想定一个数，然后让他把所有带有他选定的那个数的卡片给你，你就马上能够确定出这个数目。

这里的奥秘很简单，就只须把还给你的每一张卡片上的第一个数字相加，其和就是他所选定的数目。

这些卡片是以某种规律编制的，如图2所示，以二进制记数法写出1～63这些数字，就很容易解释清楚了。左边的数字为十进制形式，右边是该数字的二进制形式。图表最上面的六个数字是2的各次幂，用来构成二进制数。以1开头的那张卜算卡片，包括了右边第一列为1的所有数字（以十进制形式）；以2开头的那张卡片，包括了右边第二列为1的所有数字；另外四张卡片的情况都可依此类推。

这些卜算卡片很容易推广到以不是2的数幂为基础的记数法。图3表示如何用三进制记数法编制一套卡片。在三进制情况下，每个三进制数可以含有0、1或2。当一个“1”出现在某一列中时，我们便在该列所代表的卡片上把相应的十进制数记一次。当“2”出现时，就把十进制数记二次。

图4是三张一套的卜算卡片，可以辨认从1到26当中选定

1	3	5	7	9	11	13	15
17	19	21	23	25	27	29	31
33	35	37	39	41	43	45	47
49	51	53	55	57	59	61	63

A

2	3	6	7	10	11	14	15
18	19	22	23	26	27	30	31
34	35	38	39	42	43	46	47
50	51	54	55	58	59	62	63

B

4	5	6	7	12	13	14	15
20	21	22	23	28	29	30	31
36	37	38	39	44	45	46	47
52	53	54	55	60	61	62	63

C

8	9	10	11	12	13	14	15
24	25	26	27	28	29	30	31
40	41	42	43	44	45	46	47
56	57	58	59	60	61	62	63

D

16	17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30	31
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63

E

32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63

F

图1　对分的卜算卡片

的一个数目。但是，现在你每次手里拿到一张卡片就要让他人告诉你，他在该张卡片上看到所选的那个数一次还是二次。如果他看到二次，当你将关键的数相加时，就一定要把该卡片头上的数加一倍。

或许你想把这个方法推广至六张卡片。我们知道，六张对分卡片能辨认1到63的数，六张三分卡片则可辨认1到728的数。由此很容易看出，如何推广到大于3的基数。譬如说，以4的幂为基础编制的一套卡片上有些数重复二次，有些数则要重复三次。假如重复三次，那么在相加之前，一定要将头上那个数乘以3。

十进制数	二进制数					
	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
0						0
1						1
2					1	0
3					1	1
4				1	0	0
5				1	0	1
6				1	1	0
7				1	1	1
8			1	0	0	0
9			1	0	0	1
10			1	0	1	0
11			1	0	1	1
12			1	1	0	0
13			1	1	0	1
14			1	1	1	0
15			1	1	1	1
16		1	0	0	0	0
17		1	0	0	0	1
18		1	0	0	1	0
19		1	0	0	1	1
20		1	0	1	0	0
21		1	0	1	0	1
22		1	0	1	1	0
23		1	0	1	1	1
24		1	1	0	0	0
25		1	1	0	0	1
26		1	1	0	1	0
27		1	1	0	1	1
28		1	1	1	0	0
29		1	1	1	0	1
30		1	1	1	1	0
31		1	1	1	1	1
32	1	0	0	0	0	0
33	1	0	0	0	0	1
34	1	0	0	0	1	0
35	1	0	0	0	1	1
36	1	0	0	1	0	0
37	1	0	0	1	0	1
38	1	0	0	1	1	0
39	1	0	0	1	1	1
40	1	0	1	0	0	0
41	1	0	1	0	0	1
42	1	0	1	0	1	0
43	1	0	1	0	1	1
44	1	0	1	1	0	0
45	1	0	1	1	0	1
46	1	0	1	1	1	0
47	1	0	1	1	1	1
48	1	1	0	0	0	0
49	1	1	0	0	0	1
50	1	1	0	0	1	0
51	1	1	0	0	1	1
52	1	1	0	1	0	0
53	1	1	0	1	0	1
54	1	1	0	1	1	0
55	1	1	0	1	1	1
56	1	1	1	0	0	0
57	1	1	1	0	0	1
58	1	1	1	0	1	0
59	1	1	1	0	1	1
60	1	1	1	1	0	0
61	1	1	1	1	0	1
62	1	1	1	1	1	0
63	1	1	1	1	1	1

图 2

十进制数	三进制数			十进制数	三进制数		
	3^2	3^1	3^0		3^2	3^1	3^0
1			1	14	1	1	2
2			2	15	1	2	0
3		1	0	16	1	2	1
4		1	1	17	1	2	2
5		1	2	18	2	0	0
6		2	0	19	2	0	1
7		2	1	20	2	0	2
8		2	2	21	2	1	0
9	1	0	0	22	2	1	1
10	1	0	1	23	2	1	2
11	1	0	2	24	2	2	0
12	1	1	0	25	2	2	1
13	1	1	1	26	2	2	2

图 3

1	14—14	3	15—15	9	18—18
2—2	16	4	16—16	10	19—19
4	17—17	5	17—17	11	20—20
5—5	19	6—6	21	12	21—21
7	20—20	7—7	22	13	22—22
8—8	22	8—8	23	14	23—23
10	23—23	12	24—24	15	24—24
11—11	25	13	25—25	16	25—25
13	26—26	14	26—26	17	26—26

图 4

三分卡片说明"三分法"有时比二分法更有效。假如我们不断地把某个集合分成三部分而不是两部分，而且每次都被告知哪一部分包含着所选定的元素。那么少问几次就可猜出那个元

素了。当然，提问就不能再采取“是”、“否”这种形式了。

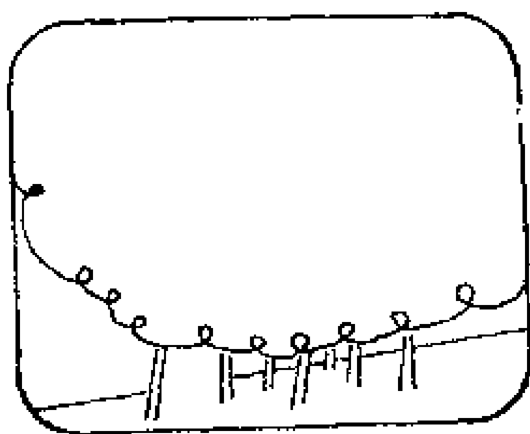
下面这种扑克戏法就很能说明三分法的效用。这种戏法使用任意的 $3^3=27$ 张扑克牌，一个人看过这堆牌后记住其中的任意一张。魔术师把这些牌混在一起，然后把这些牌翻开并分成三堆。这时，看牌的人要说出那张牌是在哪一堆里。

魔术师把牌迭在一起，又把牌翻开并分成三堆。这时该观众指出含有被选中牌的那一堆，魔术师再把牌迭在一起，并且第三次也是最后一次把牌分成三堆。选牌的人再次说出刚选中的那张牌在哪一堆以后，他就把牌迭在一起，牌面朝下放在桌子上。此时那观众叫出所选的那张牌，魔术师也随之翻开最上面的那张牌，一看，恰好是选中的那张牌。这一戏法可以反复进行多次，决不会出错。

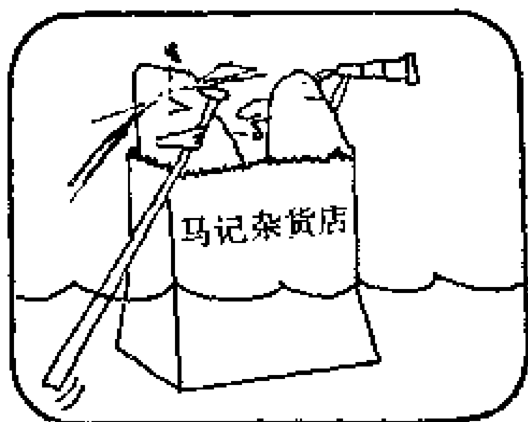
奥秘很简单，魔术师每次拾起这三堆牌的时候，总是把含有选中的那张牌的那堆牌放在最上面，这样就自动把选中的那张牌分到了最上面。

其过程是不难明白的，道理同猜电话号码完全一样，不同之处只是每次把一组元素不是分成二分之一，而是分成三分之一。第一次将牌收起来以后，那张牌肯定在前九张之内；第二次将牌收起来以后，它一定在前三张里面；第三次将牌收起来以后，就必然是第一张牌。假如你将选中的那张牌翻开，从头至尾再做一遍，那么当这张牌经三步向上移到顶上时，你便可以看到它步步上移的情形。利用计算机以这类方式将元素分类，在现代信息检索理论方面起着重要的作用。

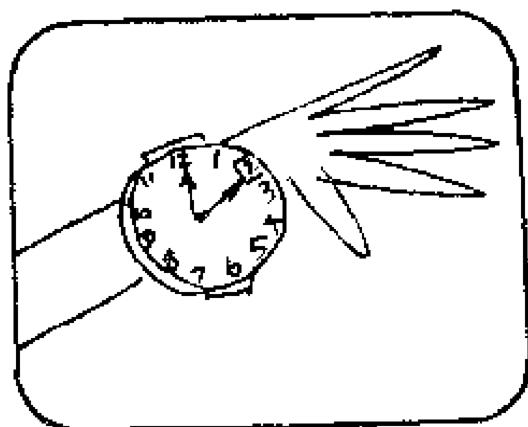
倒霉的帽子



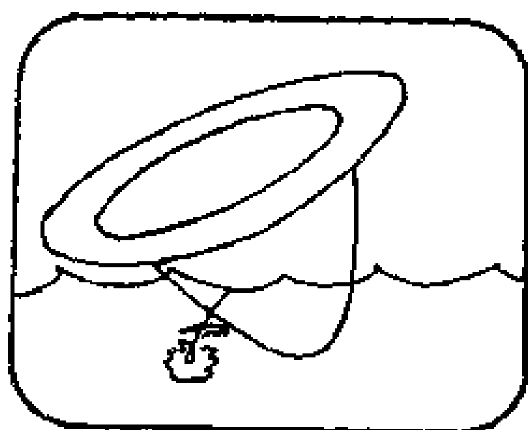
鲍勃和海伦决定去缅因州森林度假，亨利叔叔住在森林里的一间小屋子里。



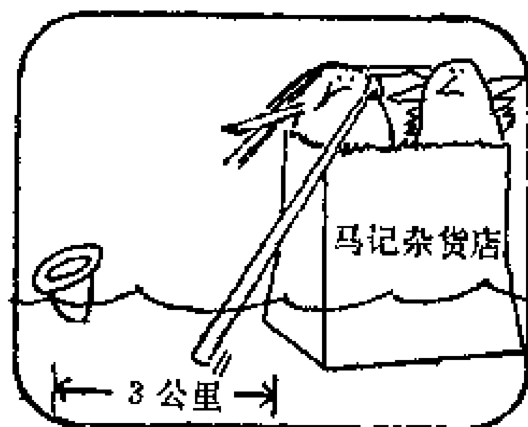
为了去那间小屋，他们只得租借一只小船，沿着一条小河向上游划去。



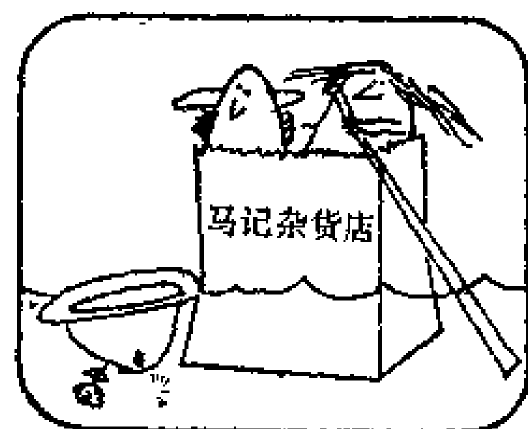
鲍勃坐在船头，海伦在船尾。两点钟的时候，海伦摘下草帽，把它放在身后的船尾部位。



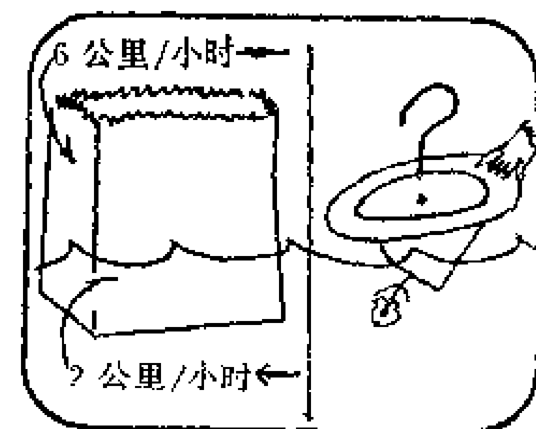
突然，草帽被一阵风刮走了，但海伦和鲍勃当时都没有觉察。



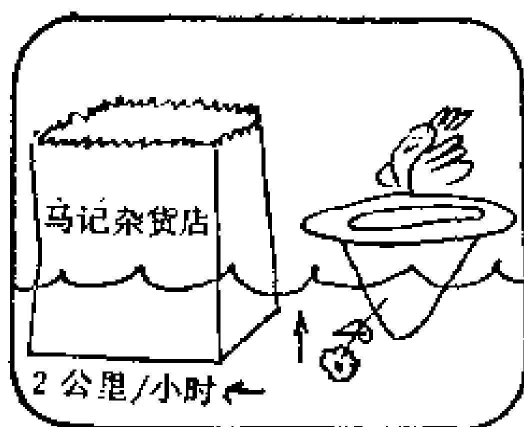
他们逆流划离草帽3公里以后，海伦突然喊了起来："等一等！把船停下来，我那顶漂亮的草帽不见了。"



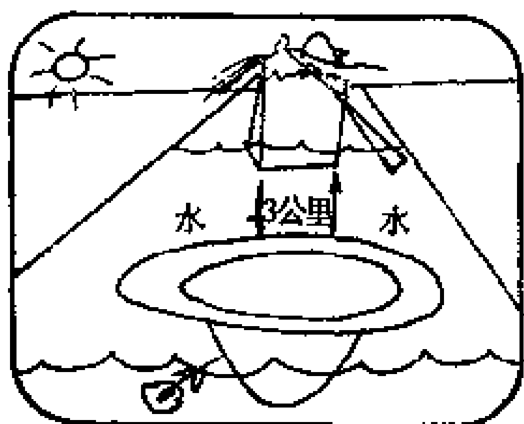
他们调过船头顺流而下，一直追上了那顶草帽。



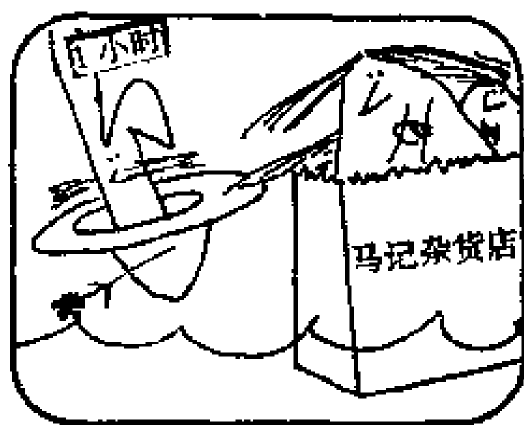
假定小船在水中的速度总是保持在每小时6公里，而水流速度每小时固定为2公里，那么海伦追回她的草帽要多长时间？



你有什么诀窍可以方便地解答这一问题？你是否相信，水流速度对小船和草帽的作用是一样的，因此可以完全不予以考虑。



所以说，相对于河水而言，小船离开草帽行驶了3公里，然后又驶回了3公里，总共为6公里。



又因为小船是以每小时6公里行驶的，来回路程恰巧花了一个小时，所以海伦追回草帽的时候正好是三点钟，是不是这样？

相对速度

海伦和鲍勃走了一个来回路程，先是逆流驶离帽子，然后再顺流驶向帽子。因为帽子是沿着水流方向漂动的，所以水流对他们的行驶时间没有影响。下面是一则极为相似的又一例子，例中来回路程并不以沿水流漂动的物体计算，而是以岸上的某一固定物体来计算。

假定河水不流动，鲍勃和海伦向上游划离岸边的船坞3公里，然后调头划回到船坞，来回行驶时间一共20分钟。

现在假定河水象前面的例题中那样，以每小时2公里的速度向下游流去。如果他们逆流行驶划了3公里，然后回到船坞边，那么总的行驶时间比20分钟长还是短？

有人会说，总的行驶时间仍然是20分钟，因为水流对小船逆流行驶时的减速作用和顺流时的加速作用是等量的。

这样回答是错的，为什么？

回答这一问题的窍门是这样的。逆流行驶3公里花的时间要比顺流行驶3公里时来得长。因此，水流使小船减速的时间要比水流使小船加速的时间长，所以来回行驶的时间就长了。只要列出代数方程式，很容易证明这一点。

此窍门同样适用于顺风和逆风航行的飞机。在无风的情况下，如果飞机在一定时间内由 A 飞到 B，然后再飞回到 A。可以肯定地说，如果有一股稳定的风，从 A 吹向 B 或从 B 吹向 A，那么同样来回航程所花的时间就要长一些。

下面是另一个很好的有关相对于陆上某一固定物体而运动的问题：一位姑娘登上火车的最后一节车厢，她没有找到座位，所以她把笨重的手提箱放在车厢的通廊上，此刻正好经过"平跟鞋工厂"。她以恒定的速度在火车里向前走了5分钟以后，到达最前面的那节车厢。仍没找到座位，她又以同样的恒定速度往回走，一直走到她的手提箱处。此时，她正好经过离"平跟鞋工厂"5公里的"平头鞋工厂"，那么火车开得有多快？

这个问题同第一个问题一样，只要用一个很简单的窍门就可以马上回答出来。其实根本不必知道这位姑娘走得有多快或走了有多远。假如她在火车车厢的通廊里来回走了10分钟，那么手提箱在这10分钟里面就行进了5公里，所以火车的速度为每分钟半公里，或者说每小时30公里。

下面为一道不太出名的速度难题，曾经难住过一些著名的数学家。一个男孩和一个女孩进行百米赛跑比赛，男孩跑过 95 米的时候，女孩已冲过了终线，所以她以 5 米的距离赢了这场比赛。

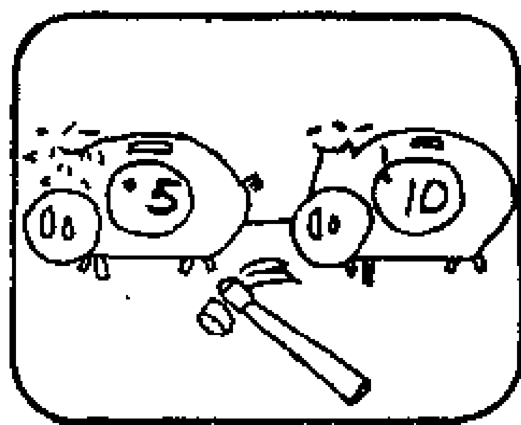
当他们第二次比赛的时候，女孩想使比赛均衡一些，所以她让自己吃亏一点，而在起跑线后面 5 米处开始起跑。假如两人以与第一次比赛时相似的恒定速度赛跑，那么第二次比赛谁是胜者？

如果你认为这次比赛是不分胜负的，那你得再思考一下，找一找它的诀窍！

提示：男孩和女孩在跑道上的何处正好是并肩齐进？

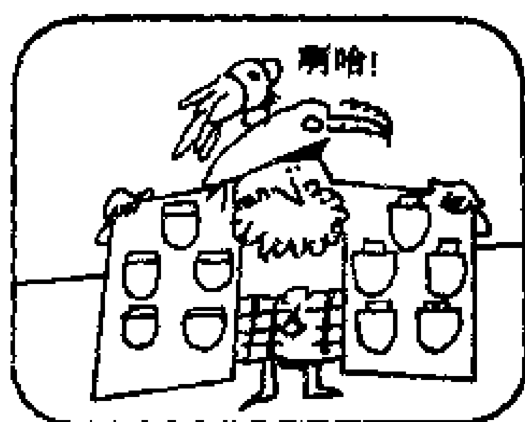
下面是一道有趣的"看谁答得快"的例题。在一把米尺的一端，有一只醉了的瓢虫，它想爬到尺棍的另一端去，它每秒钟向前爬 3 厘米，又后退了 2 厘米。这只喝得酩酊大醉的瓢虫，爬到尺棍的另一端需要多长时间？（答案不是 100 秒）。

钱币问题



他们快要到达亨利叔叔的住处时，海伦对鲍勃提了一个"看谁答得快"的问题。

海伦：一只装满 5 元金币的钱罐和一只装满 10 元金币的同样钱罐，哪一只的价值大？



鲍勃最初怔了一下，最后还是答对了。然后他反过来向海伦提了一个这样的问题。

鲍勃：一个苏格兰人有44张币值为一元的钞票，身上有十只口袋，若使每只口袋装的钞票数都不一样，他究竟应该怎么分配这些钞票？

“鸽 笼”证 明

装满5元金币的钱罐，同装满10元金币的钱罐里的金子的量是一样的，所以这两只罐子里的金子在价值上是相等的。你可能会这样想，小金币装满钱罐时，装填的密度要比大金币来得大，但情况并非如此。假如你把小卵石放进一只桶里，空隙同桶的容积之比，与在桶里投放大卵石时是一样的。

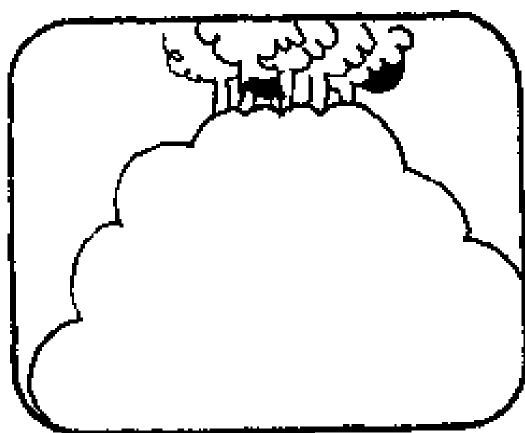
有关44张币值为一元的钞票和十只口袋的苏格兰人的问题，则显得更深奥些。让我们来看一下，当把可能的最少量的钱放到各口袋里的时候，将出现什么样的情况。第一只口袋不装钞票，第二只口袋装一张钞票，第三只口袋装两张钞票，依此类推，直到第十只口袋装九张钞票。但是，$1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$。这样已经超出了原有的44张钞票。显然，若是不使某两只口袋装的钞票张数相同的话，是无法减少任何一只口袋里的钞票张数的。

数学家把此类证明称为“鸽笼”证明。下面是个用同样窍门解答的另一道难题。假定某城镇的人口不超过200,000人，那么该城镇是否有两个居民头上的头发根数是完全相同的呢？

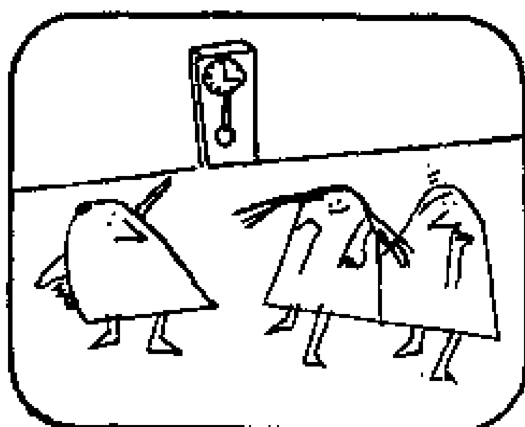
起初你可能会想，这是不可能的。但是我们来看一下，采用鸽笼方法分析的时候，将会出现什么样的情况。一个人头上的

头发数目，决不会超过100,000根。假如没有相同头发根数的人的话，那么有一个人可能是秃头，另一个人只有一根头发，而另一个人可能只有两根头发，如此等等。但是，我们一旦数过了头发根数都不相同的100,000个人，以后就不得不重复了。第100,001人的头发数目，肯定同100,000个人里面某一人的头发数目相同。因为镇上的人口有200,000，所以肯定不只是有两个人的头发数目一样，而是大约100,000个人都有头发数目与其一样的人！

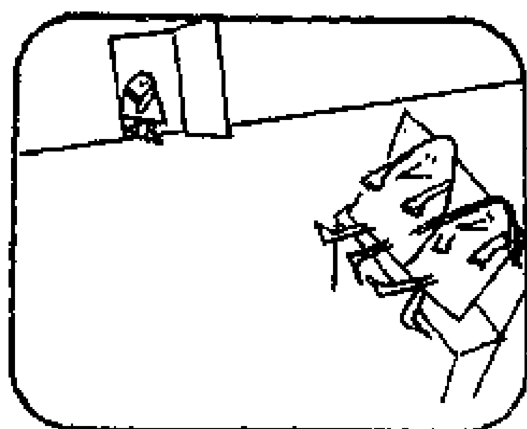
亨利叔叔的钟



海伦刚好答出了鲍勃提出的那个问题，这时他们已来到了亨利叔叔的住处。他那间小屋是他自己造的，屋里没有电灯，更没有电话、电视机或者收音机。

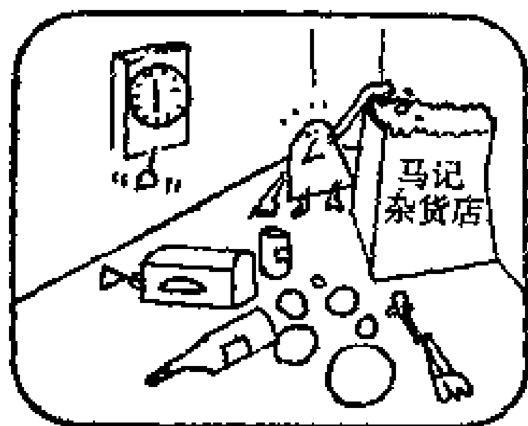


亨利叔叔说的第一件事是：亨利：现在几点钟了？

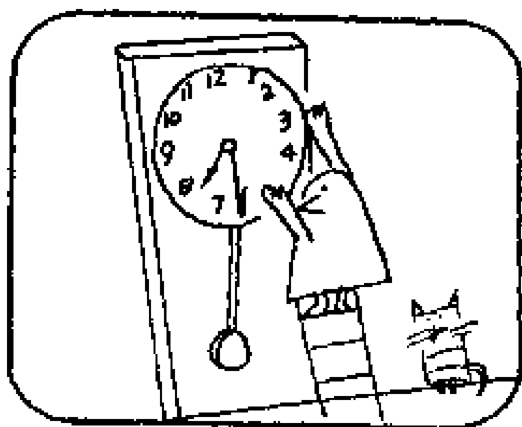


海伦：对不起，叔叔，我们在路上把手表丢了。你没有钟吗？

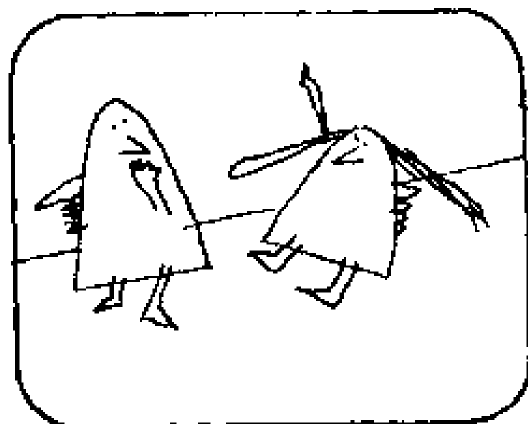
亨利：有的，可是真糟，昨天晚上我忘了上发条。你俩稍等一下，我到村上去看一看钟点，顺便再买点食品。



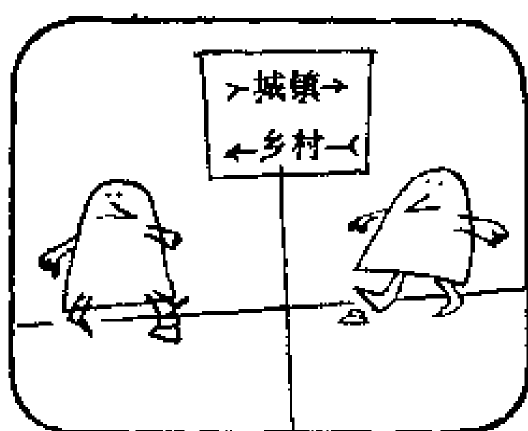
亨利叔叔步行走到镇上，在食品杂货店里花了约半小时。



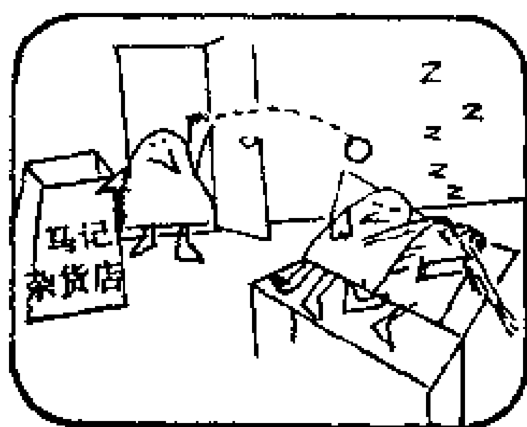
他回家后，做的第一件事情就是拨好他的时钟。



海伦：你肯定钟点对吗？除非你知道走了多远和走得多快，否则这钟点是不会正确的。



亨利：不，海伦，我不知道这么多的事情，我只晓得我走到镇上，又沿同一条路回家，走的速度一样，我总是能够正确地把钟拨准的。



假定亨利叔叔离家前给钟上好了发条，而杂货店里的钟又是准确的，那么他回家时是怎么知道准确的钟点的？

拨 钟 点

解决这个问题的诀窍在于认识到：亨利叔叔可以在离家以前先把停了的钟上好了发条，用它确定离家和到家之间所花的总时间。当然，他上好了发条后，因为还不知道正确的时间，是无法正确拨好钟点的，不过他离家前记住了钟上的钟点。

当亨利回家以后，时钟便告诉了他，他步行到镇上，在杂货店耽搁一段时间，再走回家一共花了多长时间。因为店里有钟，所以他不难确定在店里呆了多长时间。他把这段时间从他不在家里的总时间（总时间由家里的时钟记下）里扣除掉，便得出了路上来回步行的时间。因为他走的是同一条路，速率又保持不变，所以步行时间的一半，就是他步行回家所用的时间。然后他把这段时间加在他离店时店里那台钟当时的钟点上，这样就得出了他到家的正确的钟点。因为他准确地知道回到家的时间，

所以能够正确地拨好他家里那只时钟的钟点。

下面是个巧妙的时钟问题，十个人里有九个人都答得不对。在中午 12 点钟到午夜 12 点钟之间，时针通过分针多少次？大多数人说有 11 次，但正确的答案是 10 次！不信的话，你可以拨动手表的指针试试看，试了以后你自己就会相信了。

这一有点出乎意料的事实，包含在另一个问题的解答里面，这个问题初一看似乎不列出代数方程的话是无法解的。时钟有根长秒针，中午 12 点时，三根指针全部重合在一起。那么在重新到达 12 点之前，是否还有一次三根指针正好重合在一起的时刻？

我们首先确定时针与分针重合的点有几个。你或许会想，它们的重合点有 12 个，但如我们已经知道的，在中午 12 点同午夜 12 点之间，这种重合只出现 10 次。加上指针在 12 点时的重合，总共有 11 个不同的点使两根指针重合在一起。用同样的推理，秒针与分针在 59 个不同的点处重合在一起。因此，时针与分针的重合由 11 个相等的时间间隔分开，而分针与秒针的重合则由 59 个相等的时间间隔分开。

我们把第一种重合之间的间隔数称为 A，把第二种重合之间的间隔数称为 B。假如 A 与 B 有一个公共因数 k，那么就会有 k 个点，当到达这些点的时候，就会同时出现两种重合现象。但是，11 与 59 之间没有公共因数，因此，在中午 12 点与午夜 12 点之间不可能有一个点同时出现这两种重合现象。也就是说，这三根指针只能在 12 点时才完全重合在一起。

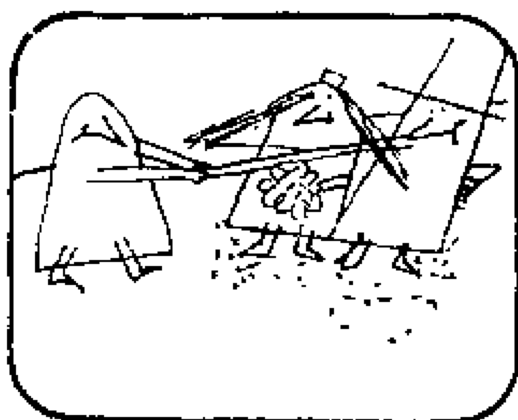
现在有两个“看谁答得快”的时钟问题，可以难倒你的大多数朋友。一只钟敲 6 点，花了 5 秒钟，那么它敲 12 点要花多少秒？

假定亨利叔叔太累了，他 9 点钟上床休息，打算睡到次日早上 10 点。他把闹钟拨到 10 点，过 20 分钟就睡着了。闹钟叫醒

他之前，他睡了多长时间？

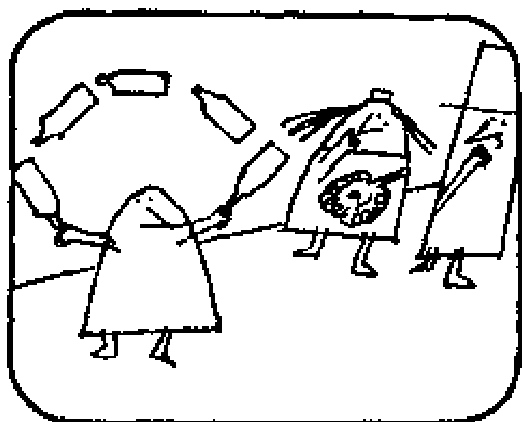
这两道题的答案都在书末。

1776年的精神

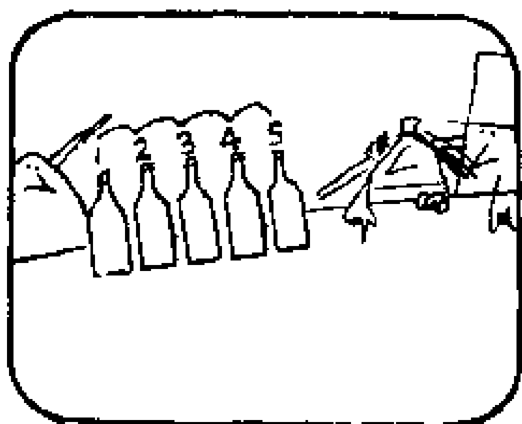


他们访问的最后一天，鲍勃和海伦告诉亨利叔叔，他们决定结婚了。

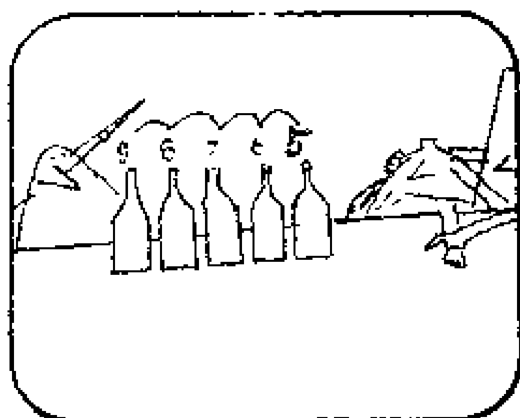
亨利叔叔：好极了，亲爱的，这要好好庆贺一番。



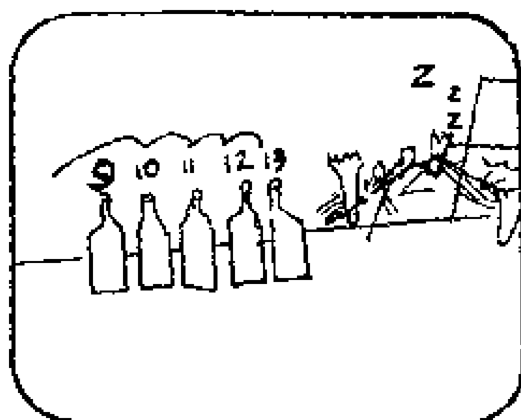
亨利叔叔拿出了五瓶酒，这是他留作特殊场合用的，但谁也定不了开哪一瓶酒。



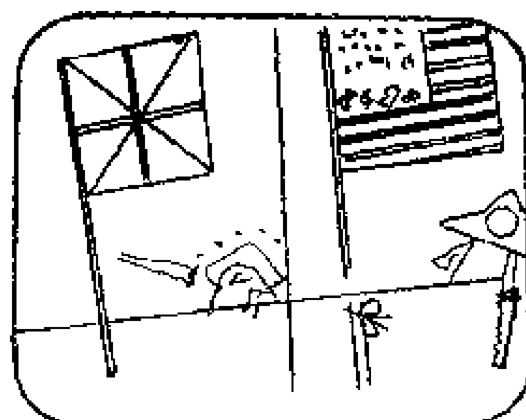
亨利叔叔：我知道。我们先把这些酒瓶排成一排，然后我按照吉祥的次序来回计数，看我是怎么数的，1、2、3、4、5……



亨利叔叔：6、7、8、9……



亨利叔叔：10、11、12、13……，知道吗？



鲍勃：知道了，叔叔。但是你准备数到多大数呢？

亨利叔叔：今年，1976年不是二百周年纪念吗？我们数到1976。

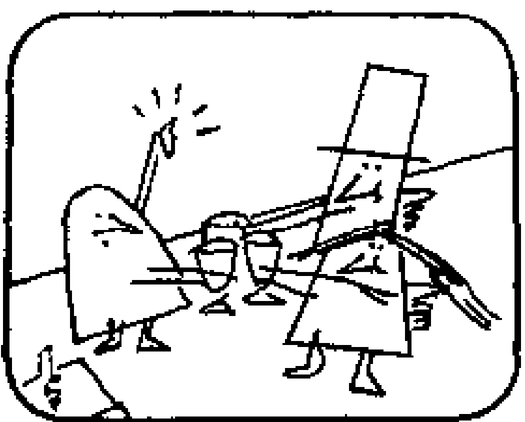


海伦：（哼了声）噢，亲爱的亨利叔叔，那可数个没完了。唔，等一等，你不必数，我现在可以马上告诉你最后数到哪一瓶。



海伦：最后应该数到第二只酒瓶，我已想出来了。亨利叔叔并不相信她的，一定要自己数这些瓶子，十五分钟以后，他在第二只酒瓶上结束了他的计数。

亨利叔叔：上帝保佑，你是怎么知道的，海伦？



你能否用简单的方法算出计数应该在哪里结束，不管这个数有多大。你可以用与这类似的问题去考考你的朋友们。

模数运算

海伦能够避免冗长的数字立即把酒瓶从1数到1976，窍门不难看出，应用了称为模数运算或者叫做时钟运算的办法，就可立即回答出这个问题。

时钟是只有12个数的有限的算术运算的模型。其实在以12为基数的模数运算中，12对应着0。假定现在是12点钟，而你是否想知道在100小时以后时钟将指着几钟点。这只要把100除以12，记下余数就可以算出来了。余数为4，即告诉我们那时将是4点钟。只有余数对我们有用。我们说，数100等于模为12的数4，这不过就是说，当100除以12时，余数为4。

你知道亨利叔叔的计数方法是怎样等效于时钟运算的结果吗？唯一的差别是，在三只酒瓶中的每只酒瓶都代表着两个数，因为对之计数是以两个不同的方向进行的。8的计数结束在第

二只酒瓶上，然后重新开始计数循环，因此这一计数步序是模 8 运算的一个模型。

海伦只要按模为 8 来计算 1976 的值就行了。也就是说，她把 1976 除以 8，得余数为 0。在模 8 的运算当中，8＝0(模 8)。因此，1976 的计数肯定结束在第二只酒瓶（从开始计数的那一头算起）。

假如你要问，若是亨利叔叔要数一个象 12,345,678,987,654,321 这么大的数，计数该结束在哪里呢？这是否必须把整个数除以 8 呢？不，如果你找到另一个窍门的话，这是不必要的。因为 1000＝0(模 8)，你只要把最后三位数 321 除以 8 得余数 1 就行了。这个数告诉你：12,345,678,987,654,321＝1(模 8)，所以计数将结束在第一只酒瓶上。

改变酒瓶的数量，你可以设计出其它偶数模数有限运算的模型。如果以普通的从左到右的方式来数酒瓶，这样可以设计出任何模数(奇数或偶数)的有限运算的模型。

一个涉及到用循环方式对物体计数的有名问题，称作约瑟夫斯问题，因为它溯源于古代罗马的一则故事，而故事中有一个名叫约瑟夫斯的人。关于这个问题和它的同类问题有一本专著。下面是个新型的与约瑟夫斯相似的问题，你定会感到很有兴趣的。

从前有一个富有的国王，他有一个漂亮的女儿，名字叫约瑟芬。当时有数以百计的青年想要她为妻，最后除了她最喜爱的十个求婚者外，其他的一概给拒绝了。

几个月过去了，国王很烦恼，因为约瑟芬拿不定主意。“亲爱的，”国王说，“下个月你要 17 岁了。你知道，在这个年龄之前成婚，是所有公主的习惯。”

“但是，爸爸”，她回答说，“我仍然不能肯定是不是最喜欢乔治。”

“这样的话，我的好孩子，今天就得用我们的秘密仪式来决定这件事情了。”

然后，国王就告诉他的女儿这古老的仪式该怎么做。“这十个人，”他说道，“让他们站成一圈。你可以根据自己的意愿挑任何一个人，把他编作1。然后你开始以顺时针方向绕这个圈子数数，一直数到17——你的岁数。第17个人必须退出这个圈子，然后送他100金币的安慰礼物，打发他回家。”

“等他走后，你必须再从1数到17，这次要从走掉的那个人后面的人开始数起。数到17时，第17个人也象上一次那样排除掉。这样继续下去，是对余下的人继续进行计数，直到只剩一个人为止。他就是你必须要嫁的那个人。”

约瑟芬皱起眉头说：“我说不上懂不懂，爸爸。让我用10块金币试验一次好吗？”

国王答应了。约瑟芬把10块金币围成一圈，沿着圆圈数了起来，每次把第17块金币拿掉，直到只剩一块金币。国王在一旁看着，见他女儿完全弄懂了这个秘密的仪式。

十位求婚者被召进王宫，围绕约瑟芬组成一个圆圈。她毫不犹豫地从陌西瓦尔开始数起，计数进行得很快，直到除了乔治以外，其他人都走出了圈子，乔治就是她私下决心要嫁的那个青年。

约瑟芬有什么诀窍能够很容易地开始一种她预知结束时正好选上乔治的计数呢？

下面看看约瑟芬是怎么处置的。当她用金币试数的时候，记得剩下的那一块金币，就是从她开始计数点起第三块金币。所以在她开始数人的时候，是从这样一点开始的——从这点数起乔治是第三。

有一个有趣的约瑟夫斯问题的推广，它可以用一副扑克牌中的十三张黑桃来模拟。你能否把这些牌排成一个序列，使之可

以完成下面的约瑟夫斯计数。

计数开始时，把这迭十三张纸牌拿在一只手里，牌面朝下。把上面那张牌称为1，把它翻开来正好是黑桃"爱司"，把这黑桃"爱司"放在桌子上。然后数1、2，把第一张牌放在这迭牌的下面。第二张牌翻开来是黑桃"2"，把它放在桌子上，这时数1、2、3，把前面两张牌放在这迭牌下面，再翻开第三张牌。这张牌恰好是黑桃"3"，把它放在桌子上。以后继续照这样进行下去，将牌每次一张地从上面传到底部（相当于沿圆圈数数的约瑟夫斯计数法），直到你把十三张黑桃纸牌，以"爱司"到"K"的序列，正确无误地翻出并排成一列。

下面是为了实现这一计数，纸牌从上到下的排法：A、8、2、5、10、3、Q、J、9、4、7、6、K。

你可能认为：这需要花上几小时去试验，并经历一错再错才能排出这样巧妙的一种序列。其实要得出这种序列，有一个非常简单的算法（步序）。许多研究这类计数戏法的魔术师，确实花费了大量时间才找到了化繁为简的窍门，在你翻阅书末答案之前，看看自己能否想出这个窍门。

第四章 逻 辑

本章不讨论形式逻辑，而是讨论一些不需任何专门数学知识，仅用推理即可解决的一些问题。有些简短的难题故意含有使人误解的话，或者答案依赖于文字游戏。从这个意义上讲，它们很接近于谜语。不过，就大多数难题来说，并没有对读者耍什么花招。

一般地说，此类逻辑难题均同数学有关。所有的数学问题都可以在包含基本逻辑定理的演绎系统内应用推理方法予以解答。虽然本章内问题的求解并不要求你掌握形式逻辑，但解这些问题所作的非形式推理，在本质上同数学家和科学家处理复杂问题时所用的推理方法是一样的。

所谓"复杂性"，是指人们不知道如何着手去解的问题。自然，如果有一种已知的步骤——例如解二次方程的方法——每一步都规定得很严谨刻板，那么实际上就并不存在什么复杂性。人们只要应用简便合适的算法，一步步做下去直至求得答案为止。

在数学和科学上出现的有趣而难解的问题，都是些没有明显解法的问题。人们必须对这种问题长时间地苦苦思索，回忆全部有关的信息，以求突然灵机一动，得出解法。所以，一般说来，一些有趣的逻辑难题，对于以后解答更重要的问题来说，无疑是一种很好的锻炼。

本章有若干难题，甚至同重要的数学有着更密切的关系。譬如说，"彩色搭配"和后面的几个问题都依赖于图解法。这种方法同形式逻辑技巧极为相似。其中有一个难题引入了称为"实

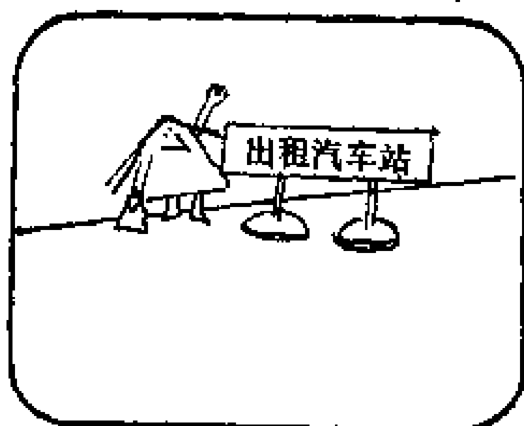
质蕴涵"的重要逻辑关系。在命题演算方面(符号逻辑的一个基本分支),蕴涵是用符号 $\supset$ 表示的。$A \supset B$ 这一关系意味着:若 A 是真的,则 B 也一定是真的。它是说明集合论中有关"整个集合 A 包含在集合 B 里"这一陈述的一种方式。

"归纳"一词有两种不同的基本含义。科学上的归纳是科学家对某些特定情况作观察的过程。例如观察到某些乌鸦是黑的,就飞跃到普遍性的结论:所有的乌鸦都是黑的。这一结论未必确切,因为总是有这样的可能性:至少有一只未曾看到过的乌鸦不是黑的。

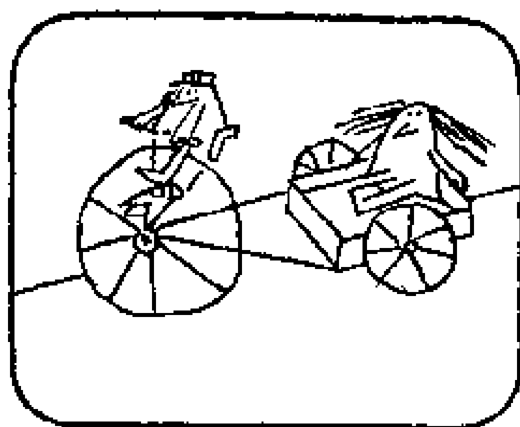
数学归纳(在"阿克博士奖"帽子测验的说明中已介绍)则是另一种完全不同的过程。虽然它也是从对某些特定事件的认识飞跃到对无穷多的一系列事件的认识,但这种飞跃却是纯粹的演绎。它象任何数学证明一样可靠,几乎在数学的所有分支里,它都是一种必不可少的工具。

本章所介绍的大部分难题,都没有象帽子问题那么重要和复杂。但是,这些难题肯定会使你变得更加机敏,它们将告诉你在问题的陈述中仔细寻找文字伏笔的重要性。尤其是告诉你,要大胆考虑一些离奇的可能性。你考虑的可能性(不管它多么异乎寻常)越多,也就越容易找到真正的诀窍。这是所有具备创新能力的数学家的奥秘之一。

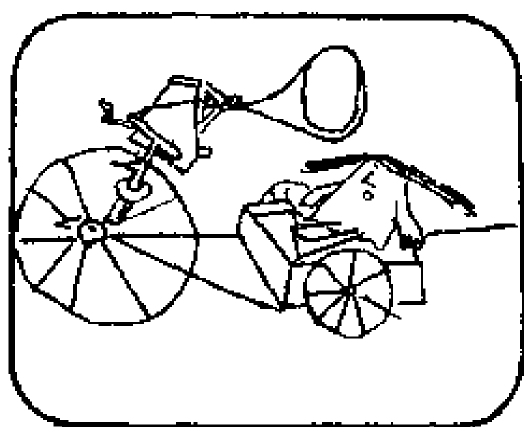
狡猾的司机



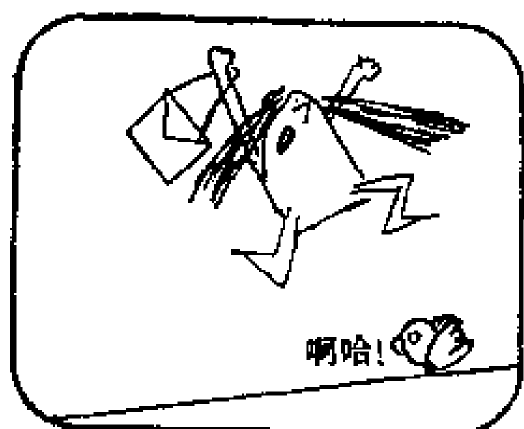
一天，这位住在纽约城的夫人招呼一辆路过的出租汽车。



在送她到目的地的路上，夫人喋喋不休，闹得司机很厌烦。



司机："对不起，夫人，你说的，我一句也没听到。我的耳朵要完全聋了，而我的助听器这一整天都不好使。"



夫人听他这么一说，就停止嘟嚷了。但当她下车后，她突然明白司机在对她撒谎。她是怎么知道的呢？

机警的夫人

这位夫人与司机的故事代表着日常生活与科学方面出现的许多现象。一个疑难的现象，往往在开始的时候人们无法理解。但是仔细考虑了所有有关的因素以后，突然脑子中闪现出对问题中某个被疏忽的方面的想法，而这正是解决这一问题的关键。

假如你无法马上回答狡猾的司机这个难题，你可以假设自己处于这位夫人的地位，然后将事情的整个过程默演一遍。当你坐进出租汽车的时候，你先说的是什么？回答当然是告诉汽车司机你要去哪儿。但是，假定司机是个聋子，他怎么会知道把你送到哪儿去呢？这位夫人付了车费以后，突然明白了司机并非是聋子，因为他把她送到了正确的目的地。

基于实际生活现象的逻辑难题，常常不是规定得很完善的，这些问题往往要求有许多未经说明的假设，上述例子也不例外。举例来说，你可能会想到，假如这位夫人在告诉司机她的目的地的时候，司机瞧着她的脸，可以从她的嘴唇动作猜出她要去的地方。这并非是文不对题的诡辩，倒是你观察的细微之处。

仔细分析一系列事件的每一方面，往往会导致科学发展史上的重大发现。一个很好的例子是，解决“工蜂们是怎么会知道

另一只飞回的工蜂所发现的蜜源的"这个令人迷惑费解的问题。卡尔·冯·弗里希观察到，侦察蜂回来后，跳起了一种奇怪的"舞蹈"。是不是这种"舞蹈"的特征揭示了蜜源的地点呢？在作了一系列巧妙设计的精确实验后，冯·弗里希最后证明事实果真如此。

假如你对这个"狡猾的司机"难题感兴趣的话，下面还有两个出租汽车的问题。一个出租汽车司机送一位住在纽约城沃尔多夫旅馆里的顾客，顾客要去肯尼迪机场。此时交通比较拥挤，汽车一路上的平均速度为每小时 30 公里，行程总共花了 80 分钟，顾客按此付了车费。在肯尼迪机场，司机又搭送另一位旅客，正巧他想去沃尔多夫旅馆。汽车司机就沿着开来时的路线返回该旅馆，而且平均速度也一样。但是这次行程花了一小时又 20 分钟，你能否解释这是为什么吗？

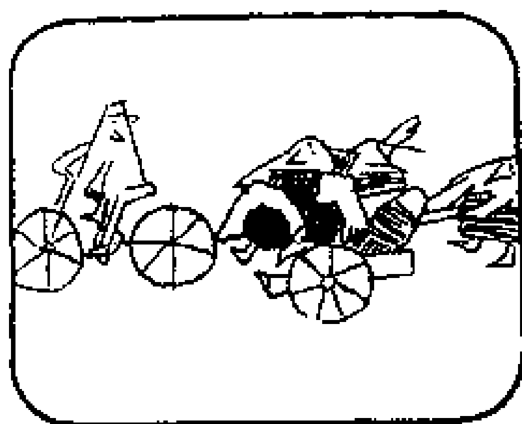
许多人对这个问题可能都要花上片刻时间，随后才明白 80 分钟同一小时又 20 分钟是一样的！这是一个有趣的诡题，可以试一下你的朋友。

另一个诡题涉及到一辆出租汽车，请看下面：

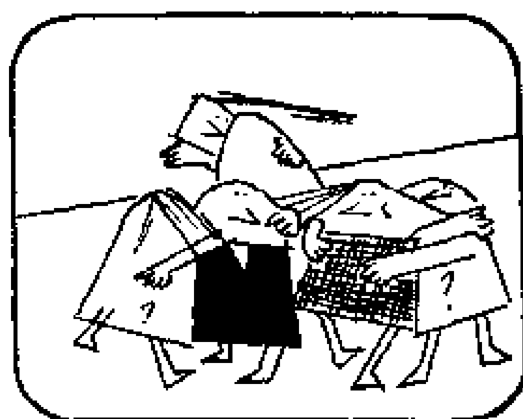
你是一名出租汽车司机，你的汽车是黄黑色的，已经用了七年。一块挡风玻璃上的雨刷已坏，气化器亦需要调整。油箱可装 20 加仑汽油，但此时只装了 3/4。汽车司机有多大岁数。

这个问题虽然在逻辑上同前面的问题完全一致，但设了一个更大的圈套。因为一开始就讲了你就是这位司机，所以你本人的岁数就是这位司机的年岁！

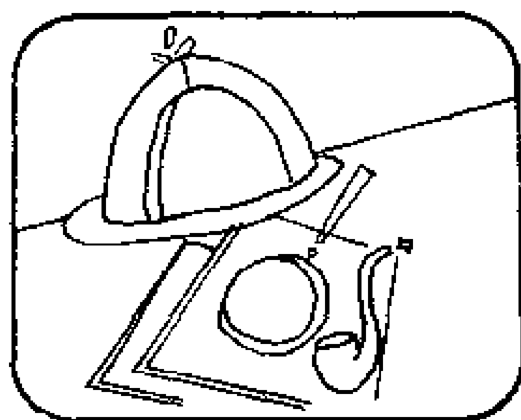
颜色的搭配



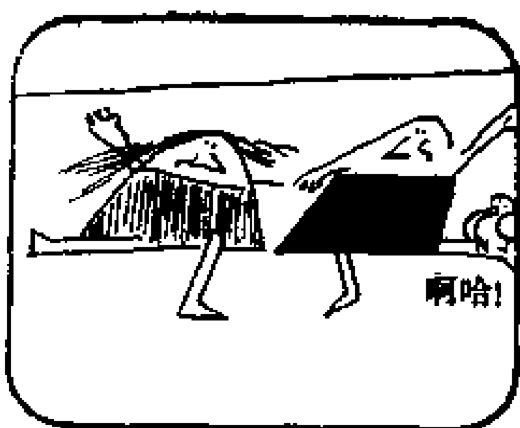
司机接着又把三对年轻男女，送到夜总会去。其中一位姑娘穿红色服装，一位穿绿色服装，而另一位穿蓝色服装。三个男青年穿同样这三种颜色的服装。



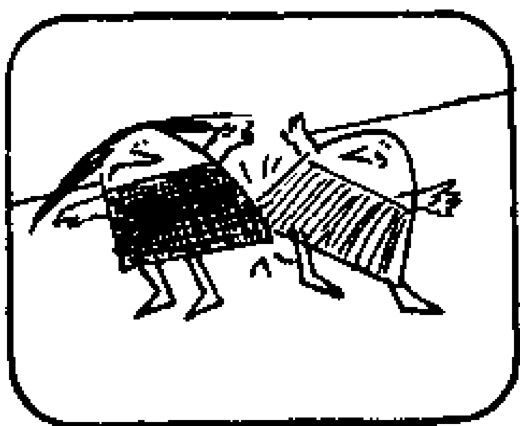
这三对男女在跳舞的时候，穿红衣服的男青年跳近穿绿衣服的姑娘身边并与她对话。弗兰克说，这不是很有趣吗？梅布尔。我们当中没有哪个人是与穿同色衣服的舞伴跳舞的。



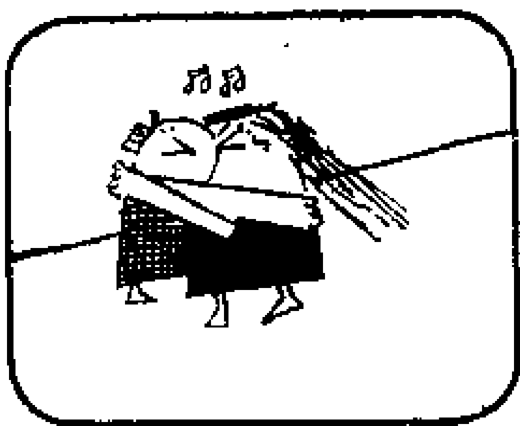
他这么一说，你能猜出红衣姑娘的舞伴是穿什么颜色的衣服？



穿红衣服的男青年一定同穿蓝衣服的姑娘跳舞。她不会穿红衣服，否则两人的衣服颜色就一样了。她也不会穿绿衣服，因为红衣男青年在同绿衣姑娘说话时，绿衣姑娘正在跟别人跳舞。



根据同样论证，绿衣姑娘既不会同红衣男青年跳舞，也不会同绿衣男青年跳舞，所以她肯定正与穿蓝衣服的男青年跳舞。



剩下一对舞伴便是红衣姑娘同绿衣男青年，问题立刻解决了，你说是吗？

蓝
红
绿

颜色的对应

许多人觉得不太好理解本题解答中的推理。似乎只有当人们完全理解了每句命题所说明的是什么，才能找到窍门。把这

些信息组织起来的一种好办法，是在图1所示这样的方阵里将这些信息进行分类：

	红 r	绿 g	蓝 b
红 R			
绿 G			
蓝 B			

图 1

方阵左边的大写字母表示男青年们穿着衣服的颜色：$R=$红，$G=$绿，$B=$蓝。顶上小写字母表示姑娘们穿着衣服的颜色。

我们已经知道，男青年衣服颜色不能同和他伴舞的姑娘的衣服颜色一样，这样就可以排除三种可能的组合：Rr, Gg, Bb。这可以通过在方阵上把三块对应的方格涂上阴影线来表示，如图2所示。

	红 r	绿 g	蓝 b
红 R			
绿 G			
蓝 B			

图 2

因为红衣男青年是跳到绿衣姑娘身边的，所以他的舞伴就不是绿衣姑娘了，这样就不必去考虑 Rg 方格了。现在，在 R

一排里只剩下一块方格了，这证明红衣男青年的舞伴一定是蓝衣姑娘。我们在 Rb 方格里打钩号“✓”作标志，如图 3 所示。

	红 r	绿 g	蓝 b
红 R			✓
绿 G			
蓝 B			

图 3

我们知道，因为蓝衣姑娘的舞伴是红衣男青年，她就不可能再同其他男青年跳舞。因此，我们可以将 Gb 方格涂上阴影线，第二排就只留下 Gr 方格，这说明绿衣男青年的舞伴是红衣姑娘，于是，便在这块方格里打上钩号，如图 4 所示。

	红 r	绿 g	蓝 b
红 R			✓
绿 G	✓		
蓝 B			

图 4

由于红衣姑娘的舞伴是绿衣男青年，她不能同其他男青年跳舞，所以我们可将 Br 方格涂上阴影线。这样就只剩下 Bg 方格，所以这方格里应该打上钩号，表示蓝衣男青年的舞伴是绿衣姑娘，如图 5 所示。问题就这样得到了解决。

	红 r	绿 g	蓝 b
红 R			✓
绿 G	✓		
蓝 B		✓	

图 5

下面是个难度更大的逻辑问题，在本质上是同类的。如不利用方阵的办法，很少有人能解出。

保罗、约翰和乔治是三个音乐大师，他们分头一个弹吉他，一个击鼓，一个弹钢琴，但也不是必定分开演奏的。

鼓手想聘请吉他演员一起录制一段节目，但他被告知吉他演员同钢琴家一起离城去演出了。

1. 钢琴家挣的钱比鼓手多。

2. 乔治挣的钱比约翰少。

3. 乔治从来没听说过约翰其人。

4. 每个大师弹奏的是什么乐器？

你能否画一张 3×3 格式的矩阵，用上述方式排除所有不可能的情况。假如你做得正确，便可得出同下面一样的正确答案：保罗弹吉他，约翰击鼓，乔治弹钢琴。

使用这种图表解决逻辑推理问题，同使用文氏图解形式逻辑的问题十分相象。在这两种情况中，都是逐步排除各种不可能的“真值”组合，直到最后只剩下一个正确的组合，从而求出问题的解。正象在“四签名”中有一次福尔摩斯对华生说：“当你把不可能的情况都排除以后，最后剩下的，虽然它或许看上去好象不可能的，但必定是对的。”

下面这个问题比上面的问题更难，它将向你介绍称为“蕴

涵”的形式逻辑中基本的二元关系。它的命题形式是：“如果……，那么……。”

同住一间寝室的四名女大学生正在听一组乐曲，她们当中有一个人在修指甲，一个人在做头发，一个人在化妆，而另一个人在看书。

1．迈拉不在修指甲，也不在看书。

2．莫德不在化妆，也不在修指甲。

3．如果迈拉不在化妆，那么莫纳不在修指甲。

4．玛丽既不在看书，也不在修指甲。

5．莫纳不在看书，也不在化妆。那么她们各自在做些什么？

不难把这四位姑娘和她们做的四件事情画成一个4×4的矩阵。命题1、2、4和5各排斥两块方格。

命题3就是蕴涵命题，它说明：“如果迈拉不在化妆，那么莫纳不在修指甲。”令A代表“如果”这个分句，B代表“那么”这个分句，“如果-那么”二元关系告诉我们，A的“真”不能同B的“假”组合在一起，但是，它并没有告诉我们A为假时A和B的真值。

因此，命题3允许有如下三种真值组合：

1．迈拉不在化妆，而莫纳不在修指甲。

2．迈拉在化妆，而莫纳不在修指甲。

3．迈拉在化妆，而莫纳在修指甲。

把被1、2、4和5命题排除的八块方格涂黑，便否定了八种“不可能”的组合，然后对命题3给出的三种可能的组合进行验证。其中两种组合会导致逻辑上的矛盾，也就是说，有两位姑娘在做同一件事情。只有“迈拉在化妆，莫纳在修指甲”这一组合情况，才不同其他命题提供的信息相抵触。最后答案是：

迈拉在化妆。

莫德在看书。

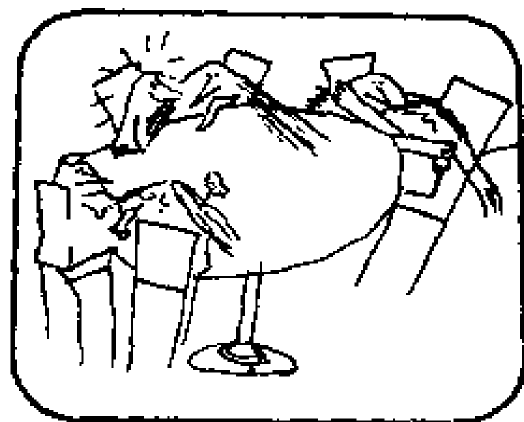
玛丽在做头发。

莫纳在修指甲。

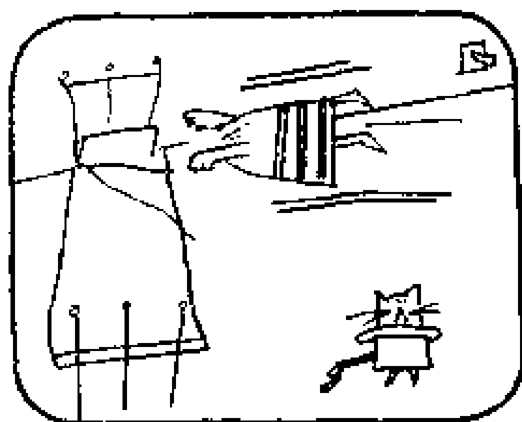
彼得·斯坦哥提出的一种简易解法是，看出由于命题1、2、4和5说明既不是迈拉、莫德在修指甲，也不是玛丽在修指甲，所以在修指甲的姑娘肯定是莫纳。但是，这一结论同命题3的“如果……，那么……”断言的第二部分相矛盾，所以该断言的第一部分也必然是假的。因此，迈拉在化妆，由此可推知玛丽是在做头发的那位姑娘。

这类逻辑难题不难编造。有兴趣的话，可自行编一道题试试。解这类问题，有好多种不同的方法——有代数方法、图论的方法、不同形式的逻辑图等等。也许你能想出一种比这里介绍的矩阵法更好的方法。

六则怪谜语

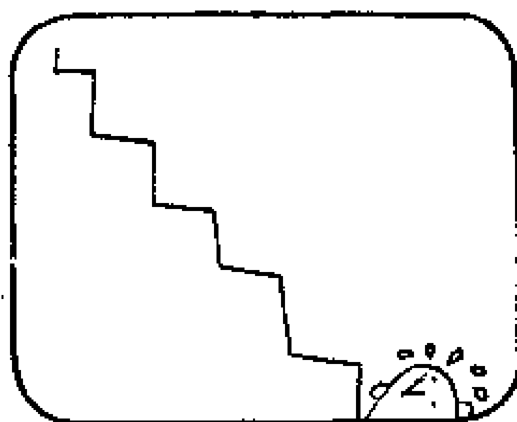


音乐停下来以后，六个朋友回到桌旁，相互猜谜玩。看你能猜中多少？



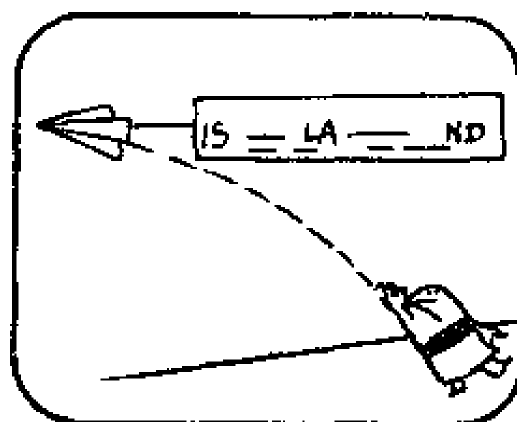
穿红衣服的男孩首先发问。

弗兰克：上星期我在卧室里关电灯，打算在房间变暗之前能到床上。假如床离电灯开关有10英尺远，我是怎么做到这一点呢？



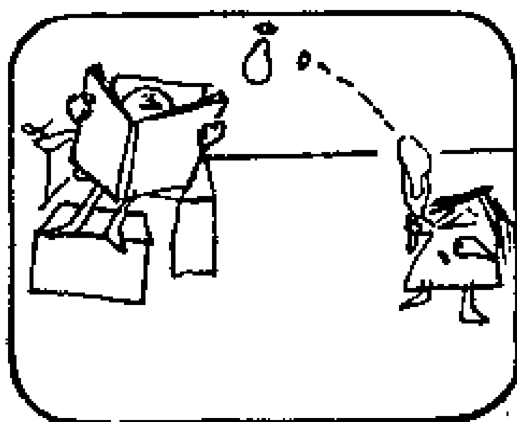
穿蓝衣服的男孩说：

亨利：我姑妈每次到公寓来看我的时候，总是马上就先到五楼，然后再向上走完余下的一段。你能否告诉我这是为什么吗？



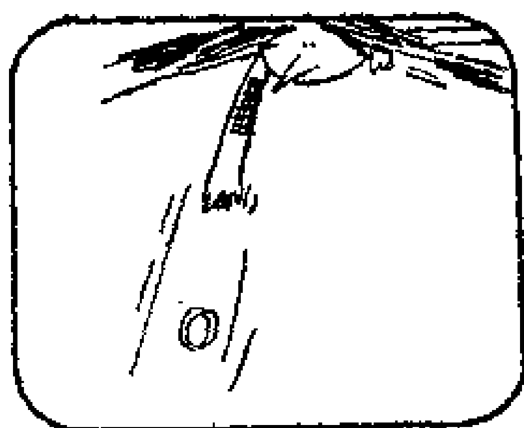
穿绿衣服的男孩说：

英曼：哪一个常用字是以“IS”开头，以“ND”结束，而中间有“LA”？



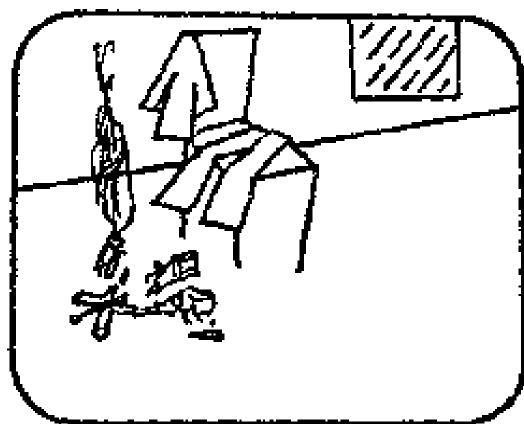
穿红衣服的女孩说：

简：一天晚上，我叔叔正在读一本有趣的书时，婶婶把电灯关了，尽管屋子里漆黑一片，他却继续在读书。他是如何能做到这一点的呢？



穿绿衣服的女孩说：

梅布尔：今天早上，我的一只耳环掉入咖啡里去了，虽然咖啡杯是满的，但是耳环没有弄湿，倒底是怎么回事呢？



穿蓝衣服的女孩出了最后一个谜语：

劳拉：昨天我父亲碰到一场雨，正好没戴帽子，也没撑雨伞，他头上什么也没遮，结果他的衣服被淋湿了，但是，他头上一根头发也没湿掉。为什么会这样？

怪 答 案

这六条谜语不只是一般的逗乐的怪题。它们告诫你不要做不必要的假设，而要考虑所有的可能性，尽管这些可能性看起来好象不大可能或者显得十分离奇。如果不是一些有大智的人对一些大家认为当然的假定提出疑问，那么某些科学上最伟大的革命永远也不会发生的。他们的下一步，亦即突然开窍的一步，就是要设想出一种在别人看来很荒谬的可能性。譬如说，哥白尼猜想太阳（不是地球）是太阳系的中心；达尔文猜想人类是由动物生命较低级的形式进化而成的；爱因斯坦则猜测宇宙结构不必遵从欧几里得几何学。

上述六则怪谜语解答如下：

1．试图求解这个问题的人，差不多人人都会不必要地假设那个时候是在晚上，可是题中并未说明这一点。其实房间没有

变暗，因为这是在白天。

2．错误的假设是，姑妈是一般身长。实际上，她是一个矮子，身高够不到电梯中她外甥那一层楼的按钮。

3．错误的假设是认为这三对字母之间一定还有别的字母，其实这个字就是“ISLAND”（岛）。

4．错误的假设是只相信人唯有用眼睛才能读书，这个人是盲人，所以是用点字法（盲文）读书的。

5．错误的假设是认为“咖啡”就意味着液体咖啡，其实这只耳环落在一听干咖啡里，自然就不会被弄湿。

6．错误的假设是认为她父亲的头上长着头发，其实她父亲是个秃顶，所以根本没有头发可以淋湿。

有几百种有趣的智力测验题目是以同样的基本思想为基础的，即把人们错误地引导到作出一个错误的假设，而这个错误的假设会阻碍人们得出正确的解答。下面是另外六个问题。

1．一个人在汤里发现一只死苍蝇，侍者向他道了歉，然后把这碗汤带回厨房，重新送来一碗显然是换过的汤。过了一会儿，这个人叫来了侍者。

“这碗汤不就是刚才那一碗吗！”他生气地说。他怎么知道的呢？

2．远洋客轮停泊时，史密斯夫人病得无法离开她的客轮。中午时分，她床位旁边的舷窗正好在水线上方七米。涨潮使水线以每小时一米的速度往上升。假设水线的升高速度每小时翻一倍，那么要隔多少时候水线将与舷窗齐平？

3．牧师索尔·罗尼宣称，在某一天的某一时刻，他将创造一个伟大的奇迹：他将在哈得逊河水面上行走二十分钟而不沉入水里。一大群人聚在一起想亲眼目睹这一情景，果然，索尔·罗尼牧师象他说的那样，在河面上走了二十分钟。他是怎样走的呢？

4．两条火车轨道除了在隧道下的一处以外，都是平行铺设的。隧道的宽度不足以容纳这两条轨道，所以在隧道长度内就变成了一条轨道。

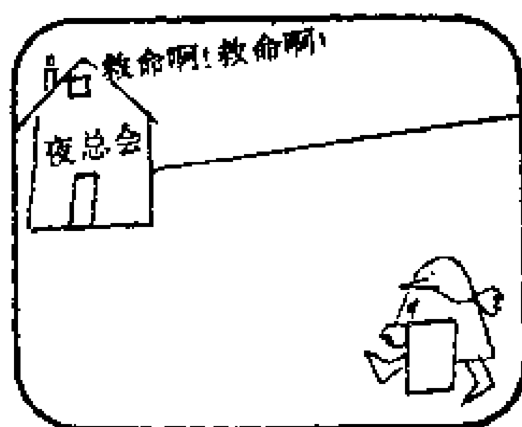
一天下午，一列火车以某一方向驶入隧道，而另一列火车以相反方向驶入同一条隧道。这两列火车都以最高速度行驶，然而它们并未相撞。请解释一下。

5．一名逃犯沿着一条乡间公路行走，这时他看见一辆警车迎面开来。在他逃入森林之前，他径直向逼近他的汽车跑了10米，他这么做只是为了向警察表示蔑视呢？还是有更好的理由？

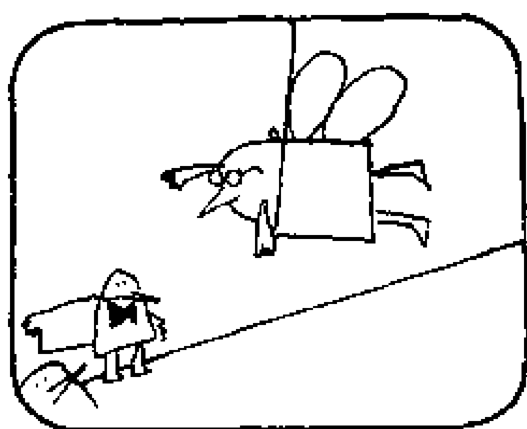
6．为什么1977元钞票(dollar bills)比1976张钞票值钱？

答案在书末，但在认真尝试回答每个问题之前，最好不要先去看这些答案。

大 盗 贼

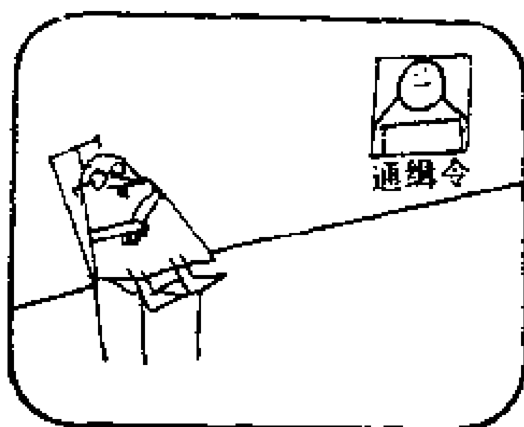


第二天，当夜总会的侍者上班的时候，他听到从顶楼发出了呼叫声。



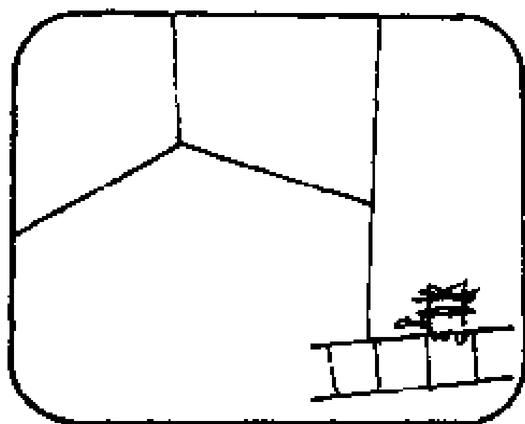
他奔到顶楼，发现管理员腰部束了一根绳子吊在顶梁上。

管理员：快点把我放下来，去叫警察，我们被抢劫了。

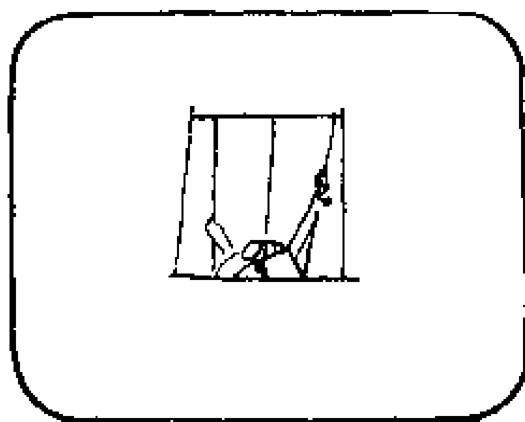


管理员把经过情形告诉了警察。

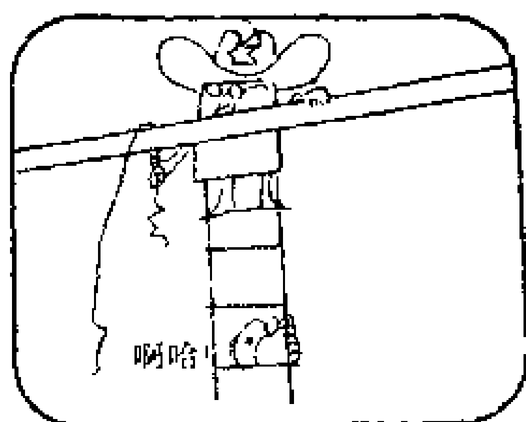
管理员：昨夜停止营业以后，进来两个强盗把钱全抢去了。然后把我带到顶楼，用绳子将我吊在梁上。



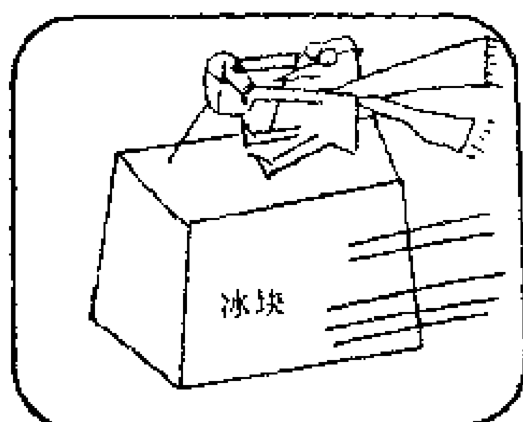
警察对此深信不疑，因为顶楼房里空无一人。他无法把自己吊在那么高的梁上，那里也没有垫脚之物。有一部梯子曾被这伙盗贼用过，但它却放在门外。



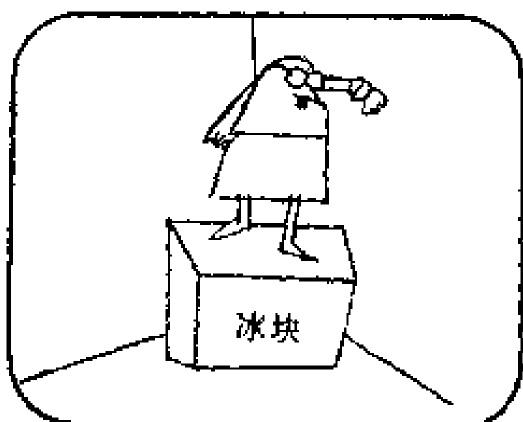
然而，没过几个星期，管理员因偷盗而被抓了起来。你能否说明一下，没有任何人的帮助，管理员是怎样把自己吊在半空中的？



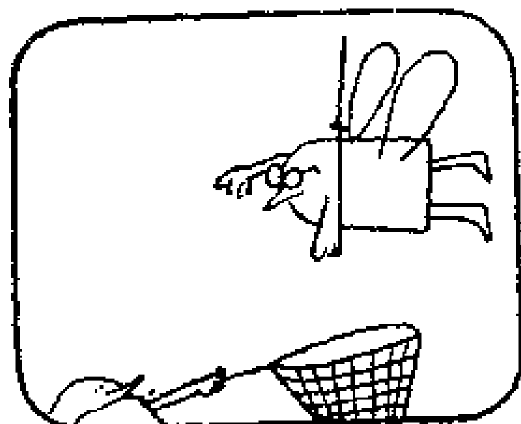
他是这样做的：他利用梯子把绳子的一头系在顶梁上，然后把梯子移到了门外。



回来时带进一块巨大的冰块，这冰块是事先放在冷藏库里的。



他立在冰块上，用绳子把自己系好，然后等时间。



第二天当侍者发现他的时候，冰块已全都溶化了，管理员就此被吊在半空中。他真狡猾，是吗？

未发现证据

许多有名的侦探小说都是以这类问题构思写成的，而侦探灵机一动就破了案。溶化的冰块，一直是早期侦探小说作家的惯用手法。譬如说，发现被害者死了，杀人凶器在哪里？结果凶器是一块有冰柱状尖头的冰块。屋内有一个人被谋杀了，房门从里面上了门闩，原来这门闩先前是用一块冰支撑着的。冰溶掉后，门闩落下就把门给闩上锁住了。

这类经典的侦探小说有A·柯南·道尔著的“索尔桥问题”，说的是在一座桥上发现一具头部被击中的女尸，桥的二侧有石头砌的护墙，没有找到那支射出子弹的手枪的痕迹。但是，歇洛克·福尔摩斯一闪念之间就想出了她可能是如何自杀并如何处置武器的。

解答是这样的：她把手枪系在一根长绳子的一头，绳子扔过石头护墙，它的另一头缚着一块大石头。她朝自己开枪以后，枪从她手中掉下，随之石头就把它拉入水中。

福尔摩斯对这个问题的解答，同他解决的许多其他问题那样，是科学方法的一个很好的范例。首先，这位大侦探灵机一动想出了一种解释武器失踪的“理论”。然后从这一理论推出一个结果，即手枪撞在石头护墙上会在石头上造成一个小缺口，而他也正好发现了这一缺口标志。最后，他设计了一个试验，进一步证实这一缺口是这样产生的。他把一块石头系在一根绳子上，绳子的另一头系上一支沃森左轮手枪。为了模仿自杀，他站在发现女尸的那个地方，放掉手中的左轮手枪。当他发现这使护墙造成了第二个缺口标志且同另一个缺口完全一样时，他的理论便有了充分的依据。

这恰好就是科学解决问题的方法。开始是提出一种理论，然后假定这一理论是对的话，便推论出实际的结果，再进一步搜寻

证据，同时设计一些试验来证明这种理论是对的。

下面是个新的侦探问题，也可以用一种巧妙的理论来解决。发现琼斯先生的身体倒在他的桌子上，头部穿了一个弹孔。侦探沙姆罗克·博尼斯看见琼斯先生的桌上有一台录音机，当他按下放音按钮时，惊奇地听到琼斯的说话声音：

“我是琼斯。史密斯刚才来电话说，他要到此地来杀死我。我并不准备躲避。如果他实现了这一恐吓，我将在十分钟内死去。本录音将告诉警察当局杀死我的是谁。我现在已听到他在走廊里的脚步声，门开了……。”

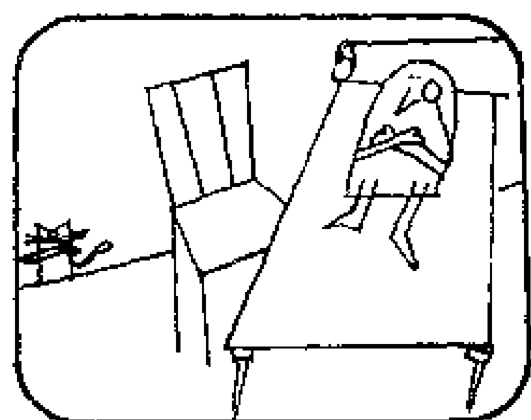
接着是咔嚓一声，说明琼斯把录音机关了。

“我要不要去抓史密斯？”博尼斯上校的助手苏席·旺中尉问道。

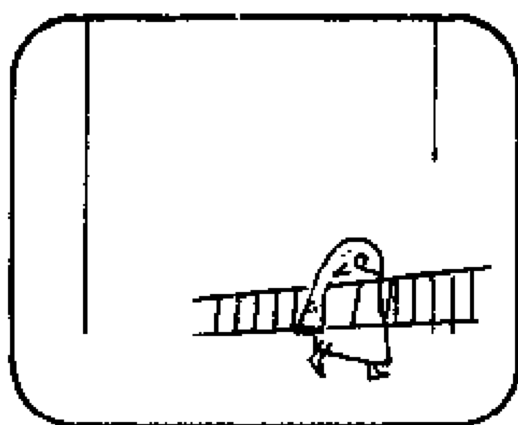
“不”，博尼斯说，“我确信是另一个能够很好模仿琼斯说话声的人杀死了琼斯，然后搞了这个录音来陷害史密斯。”

博尼斯的理论后来被证明是正确的。你能否想出是什么使他怀疑这个录音是假的？在翻阅书末的答案之前，你不妨先回答一下。

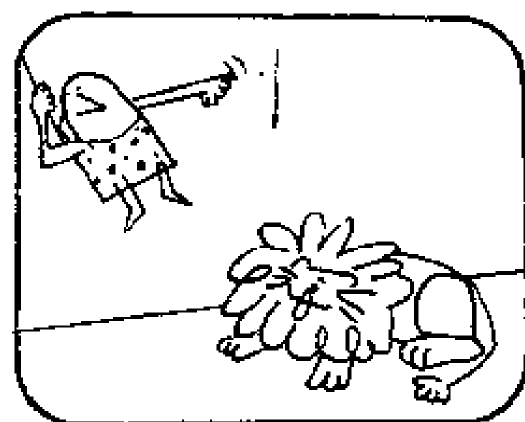
阿克博士的测验



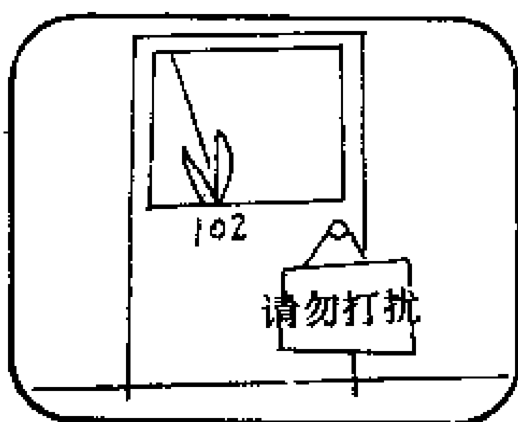
若没有阿克博士的帮助，警察当局是什么案子都解决不了的。阿克博士是位擅长解决问题的心理学教授，他把他的灵感叫做“阿克”现象，对此精心设计了好多测验。



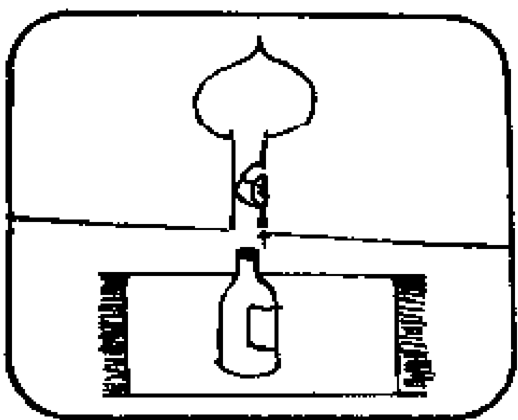
一项测验涉及到两根很长的绳子，绳子吊在一间空屋的天花板上。



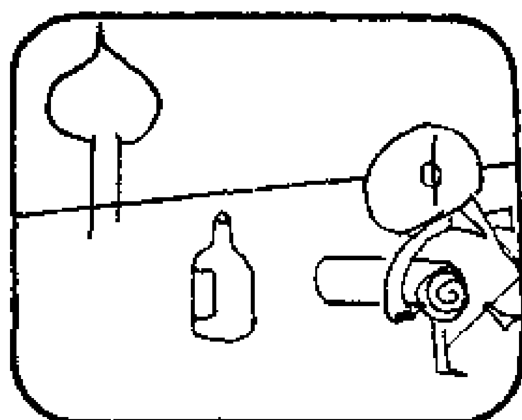
阿克博士：这两根绳子相距甚远，假如你抓住一根绳子的一端，就够不到另一根绳子。



阿克博士：要求只用一把剪刀要把绳子的两端系在一起。你能通过这项测验吗？

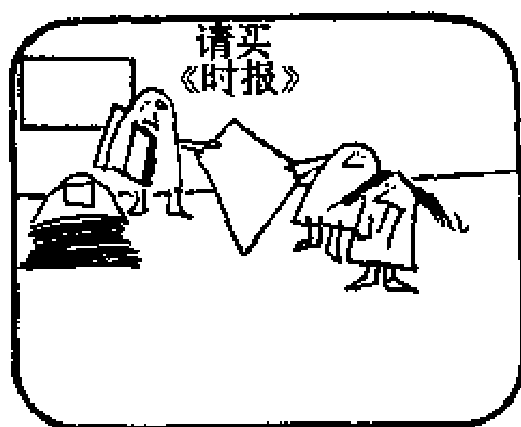


阿克博士：另一项我得意的测验是把一瓶打开的啤酒放在一块东方的小地毯中央，设法将啤酒从地毯上取出。



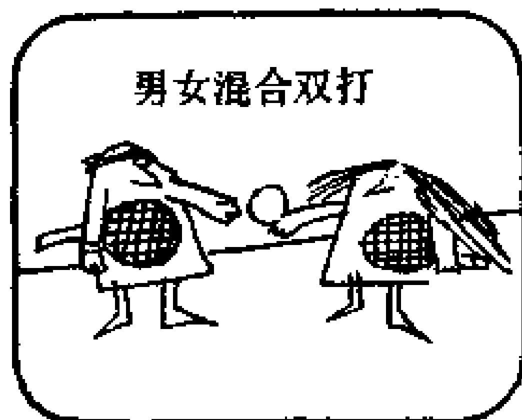
阿克博士：但是，你不能用身体的任何部位或者用其他物件接触酒瓶。当然，绝不能把啤酒泼出。

假如你没有通过上一项测验，那么这个测验你或许会成功的。



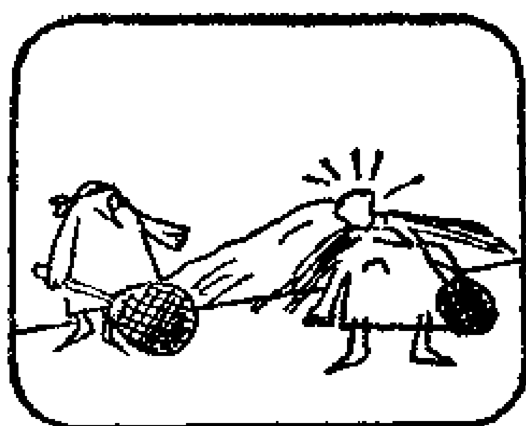
阿克博士：最后一项试验需利用一张报纸。要求你和你的一个朋友一起站在这张报纸上，但相互之间不得触到。当然，你不能走出报纸。

这是你通过阿克博士的测验的最后一次机会。



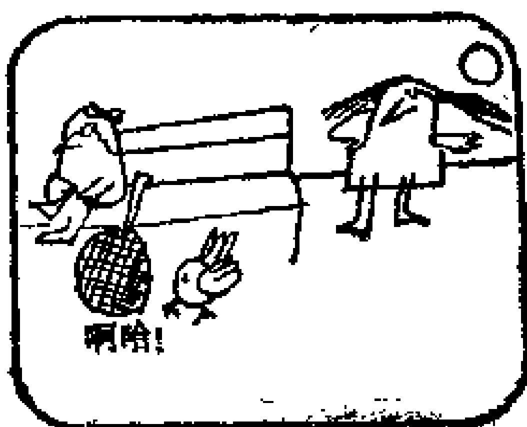
阿克博士不愿意回想起那项测验，因为他的一个学生把它答了出来，且反过来提出一个问题想难住他。

学生：好吧，阿克博士，请抛一下这只网球，使它走一小段距离后完全停住，然后自动反过来朝相反的方向行进。



阿克博士：我可以使它从某物体上反弹吗？

学生：不，不允许反弹，而且你既不能用任何东西去击打它，也不能用任何东西把它系住。



阿克博士认输了，而姑娘取过网球，完全做到了她所说的，使他大为惊叹不已。

阿克博士：阿克，我为什么没有想到呢？

他没有想到的是什么呢？

阿克博士的解答

阿克博士的绳子：你可能会想，一个人可以抓住根绳子，象“泰山”那样在这根绳子上荡秋千，正象有一张图上画的那样，从而解决这个问题。然而，这样是不行的，理由有两个：绳子并非牢得可以吊住一个人；即使绳子有这样牢，此人也够不到另一根绳子。然而，图上画的确实为正确解决这一问题提供了暗示。

假如你把剪刀系在一根绳子的一端，就可以使这根绳子象钟摆那样来回摆动，这样你可以把另一根绳子的一端尽量拉近摆动的那根绳子。当剪子朝你这边摆过来时，你便乘机抓住这把剪刀。

解决这个问题有两个窍门。第一要想到摆动绳子，第二要想到以事前没有指明的方式利用这把剪刀。心理学家对于不善于以奇特的方式运用器具有一个术语叫作“官能性固执”，凡有

这种特点的人的头脑中想到剪刀只能剪断绳子。显而易见，剪断绳子是无助于解决这个问题的。

阿克博士的地毯：你不能用身体的任何部位或者其它物件接触酒瓶。解决这个问题的诀窍在于看出这么一点，即因为地毯已经接触着酒瓶，也许可以用地毯本身将酒瓶从地毯上移开。

这一思路被证明是对的。只要在一头把地毯卷起来，当卷到酒瓶的地方时，用手在二头慢慢地卷动地毯，而地毯卷的中部会慢慢地把酒瓶推离地毯，而不会倒翻酒瓶。

同前一个问题一样，"官能性固执"对解决问题是一个思想上的障碍。人们只想到地毯是铺盖地板的，而想不到它是可以用来当作推动工具的一个物件。

阿克博士的报纸：解决这个问题的诀窍是看出这么一点，即一扇门把站在同一张报纸上的两个人分开了。只要把这张报纸放在打开着的门下面，男孩站在门一边的报纸上，而女孩站在门的另一边，这样只要他们不走出报纸，门就阻止了他们互相接触。

网球：解答此题的障碍在于认为网球习惯是以水平方向抛出的，而问题的陈述中并没有禁止人们把球笔直往上抛向空中，显然，向上一抛，球就可以达到完全停止，继而改变其运动，达到朝相反的方向运动的目的。

另一个解决办法是沿着斜坡往上滚球，这可以借口用"网球必须在空中运动而不接触任何东西"这一限制条件而将这一解答排除掉。但是，我们事前没有这样说，所以这一解法还是合法的。

还有一些其它的难题，下面五个问题会使你和你的朋友感到有兴趣的，在翻阅答案之前，不妨试试看。

1. 把一根纸梗火柴从一米高的地方落下，你能否让它的一个侧面在落地后不再滚动？

2．一些工人正在把砂和水泥调合成灰泥，以便打大楼的地基。有一块很大的混凝土块料，上面有一个深达2米的矩形小洞，一只小鸟不慎飞了进去。小洞很狭窄，手臂伸不进去；此外，小鸟进得太深，手臂伸进去也不能抓到它，若用两根树枝去夹，又要伤害小鸟。你能否想一个简便的办法把小鸟从小洞里取出？

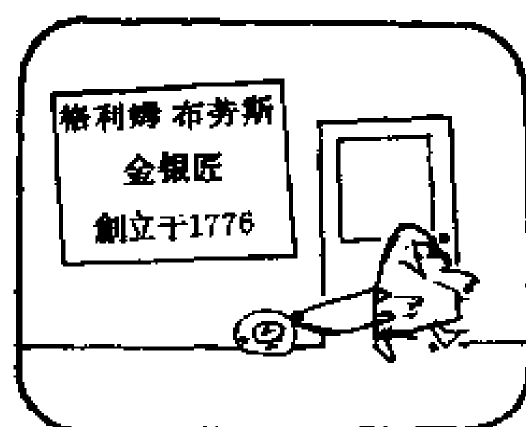
3．把一根2米左右长的绳子的一端缚在咖啡杯握柄上，另一端系在天花板上的吊钩上，或者系在打开的门上的挂勾上，使杯子悬挂起来。要求用一把剪刀剪断绳子的中央，杯子却不会落地。剪绳子时，人不能用手托住杯子或接触绳子。

4．荷兰有一条堤防缺了一块砖头，水通过一个5×20厘米的矩形洞涌进。发现这个洞的那个人手里有一把锯和一根直径为50毫米的木头圆棒。锯割这根木棒去塞住这个洞的最好方法是什么？

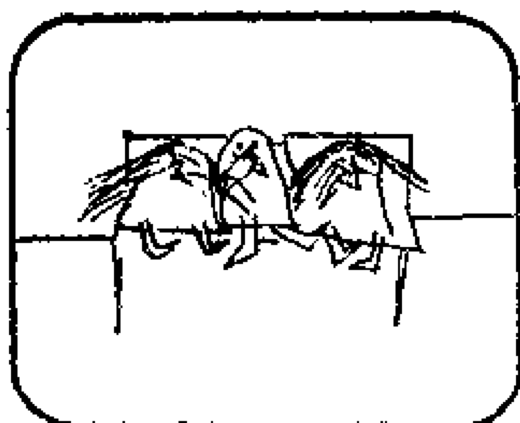
5．一只酒瓶，其下部呈圆柱形，该部分为瓶高的3/4；瓶子上部的1/4形状不规则。瓶里的酒只到瓶的一半高度，不准打开瓶塞，只利用一根直尺，怎样才能精确地确定这些酒占整瓶容量的百分之几？

这五个问题的答案均附于书末。

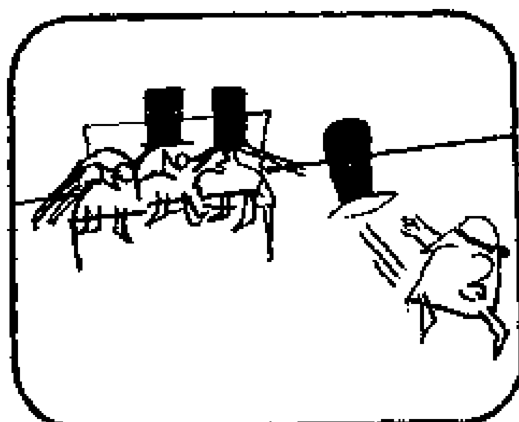
阿　克　奖



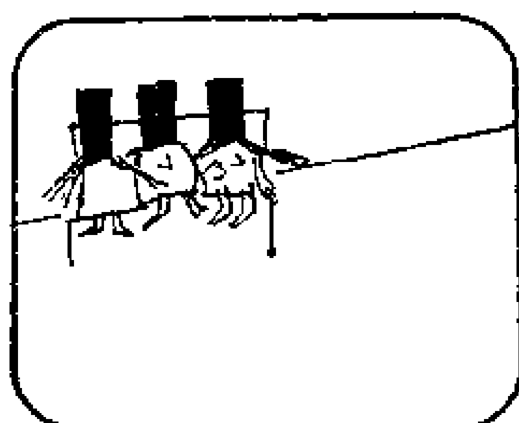
在每次阿克思维课程结束时，阿克博士总要把一枚专门的奖章送给他最优秀的学生。有一年，三个学生并列地得到过这种荣誉。



阿克博士用一次测验打破了这个均势。他让这三名学生都坐在一张长椅子上，叫他们把眼睛闭上。

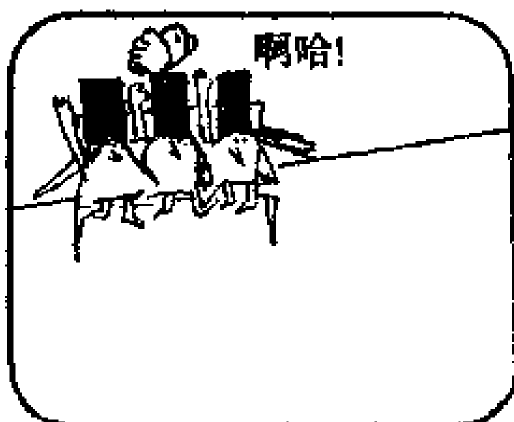


阿克博士：我准备在你们每个人头上戴一顶红帽子或者蓝帽子，在我叫你们睁开眼睛之前，都不许把眼睛张开来。

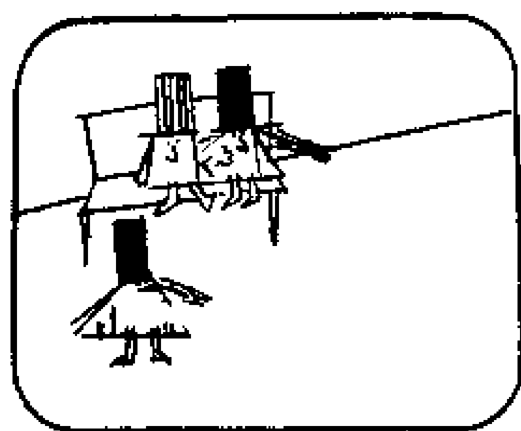


阿克博士在他们每个人头上都戴了一顶红帽子。

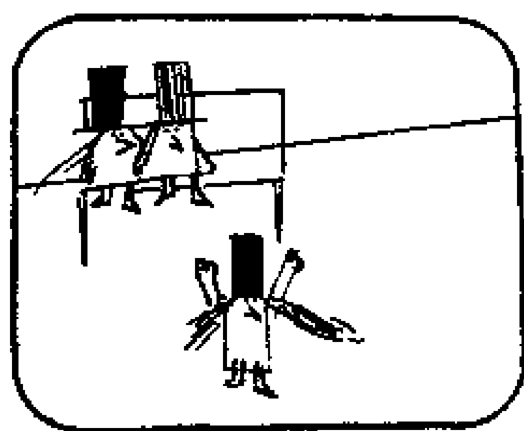
阿克博士：现在请你们把眼睛都睁开来，假如看到有人戴的是红帽子就请举手。谁第一个推断出自己所戴帽子的颜色，就给谁奖章。



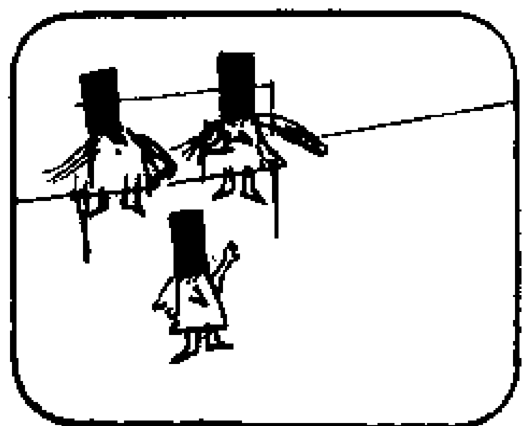
当然，三人都举起了手。但是，几分钟之后，约翰站起来并喊道：阿克先生，我知道我所戴的帽子是红色的。



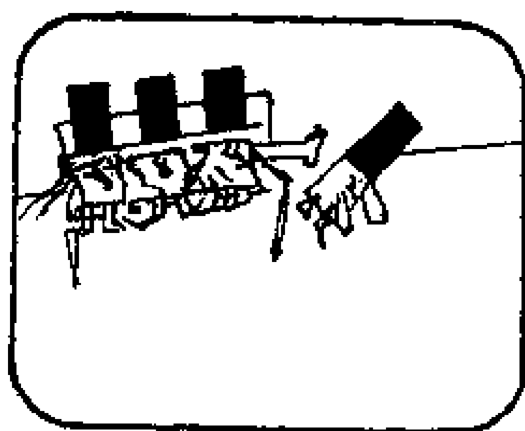
约翰：假定我的帽子是蓝的话，玛丽马上会知道她的帽子是红的，因为这样才能解释巴巴拉举手的原因。



约翰：当然，巴巴拉也会这么想。她将会知道她戴的帽子是红色的，因为这样才能解释玛丽举手的原因。



约翰：但是这两位姑娘都无法说出她们戴的帽子是何种颜色，所以她们就必定看见我戴的也是红帽子。



如只有三个人的话，很容易理解这个经典的逻辑难题。但是，假设现在有四个人，而且全都戴上红帽子，你能说出将出现何种情况吗？

■蓝
■红
■绿

推测颜色的归纳法

把这个问题中的三人推广到四人，以至推广到任意多少人，乃是一种有价值的证明方法的一个很好的范例，这方法叫做“数学归纳法”。只有当命题能象扶梯的梯级那样可以排成序列时这方法才能适用。你首先要证明，任何一个命题，只要在它之前的那个命题是真的，那么它就是真的。如果第一个命题是真的，那么其它所有命题就必定是真的了。假如你能踏上扶梯的第一梯级，也就可以一直走到顶。或者，假如你是在较上面的梯级起步的，那你就完全可以一直走上走下。

假定有四个人，他们都戴红帽子，而且全都举起了手。假如他们当中有一个人比其余几个人更聪明。他（她）就会进行如下推理：

“假如我戴的帽子是蓝的，其他三个人都会看见它是蓝的，所以每个人都将看到两顶红帽子，并会对自己戴的什么颜色帽子疑惑不定。这同前面三个人时的情况是完全一样的。最后，这三个人中有一个人会推断他自己戴的帽子是红颜色的。

“然而，假定推断了足够时间后，仍没有人敢作这样的推断，

那么只能有一个理由：因为他们都看见我的帽子也是红颜色的。所以，我原来的假设是错的，那么我的帽子肯定是红颜色的了。”

这种方法可以推广到n个人。假设有五个人都戴着红帽子，其中最聪明的那个人将看见四顶红帽子，并认识到在经过一段足够时间后，四个人当中的一个人必定会象上面解释的那样进行推理了，并知道他（她）自己的帽子是红颜色的。但是，假定没有人敢作这样的推论，那就说明他自己的帽子必定也是红颜色的。依次类推，可推广到任意多个人。在n个人当中，最聪明的那个人总是能够把情况简化成前面一种情况，然后又简化到前面的一种情况，这样一直简化到上述已经解决了的三个人时的情况。

这个一般化的问题，常引起关于问题的定义是否明确，或条件是否太模糊以至无法得到明确答案等有趣的争议。为了使这一般解有效，必须作哪些假设？n个人的推理能力是否必定构成一个相继序列？是否必须假设当n增大时，当事人推断他（她）自己的帽子是红颜色的所花费的时间也随之增加？假定有100个人，最聪明的人要花极长的时间才能知道他的帽子是红的，然后再过一段时间第二聪明的人才能知道，如此一直到最后一个最笨的人，这样讲是否正确？

类似帽子式的经典问题是不胜枚举的。下面一个例子说明，假如帽子的颜色有两种以上的话，问题就更复杂了。假定五个人戴的帽子是从五顶白帽、两顶红帽和两顶黑帽当中挑选出来的，如果他们戴的全是白帽子，那么比其他人更聪明的那个人是怎样推断出他的帽子是白颜色的？

关于开始时的双色问题，有一个极奥妙的三个人的变相问题，它消除了所有含糊不清之处。假定三个人坐在三把椅子上，一个人坐在另一个人的后面，三人都面对一个方向。后面椅子上那个人可以看见前面那两个人的帽子，中间那个人只能看见

前面那个人的帽子，而前面那个人却看不到任何帽子。就当这几个人好似一个比一个"瞎"一样，而前面那个人是全"瞎"的。

公正人从三顶白帽和两顶黑帽里拿起三顶帽子，这些人在把帽子戴上之前，眼睛全都闭上，不用的帽子都收藏起来。

公正人问后面那个人是否知道他戴的那顶帽子是什么颜色，他回答："不知道。"

中间那个人同样被问及这一问题，他也说："不知道。"

当问及前面那个人时，他答道："我知道，我的帽子是白的。"他是怎么推断出来的呢？

他是这样推理的："坐在后面椅子上的那个人，只有当他看到两顶黑帽时才能说'知道'。他说'不知道'，证明他看到的这两顶帽子不都是黑的。现在假设我的帽子是黑的，那么坐在当中的那个人就看到它是黑的。而中间那个人一听到他后面的那个人说'不知道'，他知道自己的帽子一定是白的——否则后面那个人会看到两顶黑帽，就要讲'我知道'了。因此，中间那个人应该说'我知道'。然而，实际上他却说'不知道'，这证明中间那个人看见我头上戴的是白帽子。因此，我原先的假设是错的，我的帽子是白色的。"

象早先的那个例子一样，本题也可用数学归纳法很方便地推广到 n 个"越来越瞎"的人，他们坐在排成一列的 n 张椅子上。从坐在最后面的那个人开始提问，然后往前问过去。帽子的来源是 n 顶白帽和 $n-1$ 顶黑帽。现在研究一下 $n=4$ 的情况。最前面的那个"盲人"知道，假如他的帽子是黑的，身后的三个人就会看见他的黑帽子，知道只有两顶黑帽子留给他们自己。这样，这个问题就简化为前面那种情况了。假设最后面两个人回答"不知道"，第三个人（直接坐在"盲人"的后面）则会说"我知道"，正象前面那种情况一样，然而，假定他回答"不知道"，这便为"盲人"证明了他的假设错了，他的帽子一定是白的。于是，数

学归纳法就把证明扩充到n个人。如果除了“盲人”，其余的人都说“不知道”，那么肯定大家全都戴着白帽子。

现在可以提出一个更难的问题。假定在三个人的情况下，公正人从五顶帽子(三顶白帽、两顶黑帽)任意组合三顶给他们戴上。被提问的次序同前面的完全一样。是否他们当中总有一个人会回答知道？你可能会乐于想出这个问题，并证明可以推广到n个人、n顶白帽和$n-1$顶黑帽。总有某人回答说知道。第一个答上来的人总是那些自己戴了白帽子、且知道自己前面没有白帽子的人中间最早被问及的人。

两种颜色的帽子同标上0和1的帽子是一样的，0和1也即是二进制记数法的整数。有很多涉及两种以上颜色的帽子问题(例如前面曾举过一例)，我们用整数代替这些颜色会使这些问题容易理解些。不妨以如下的两人游戏为例来加以说明。

公正人任意挑选两个连续的正整数。把写有某一数字的一块圆牌贴在一个人的前额，写有另一个数字的一块圆牌贴在另一人的前额。每个人只能看见对方的数字，但看不见自己那块圆牌上写的数字。两人都很诚实，很有推理能力。

然后公正人问每个人，是否知道他自己额头上的那个数字，这样轮流对每个人不断询问，直到有一个人说知道。运用数学归纳法，你可以证明，假如这两个数字较大的那个是n，那么一个人可以针对第n或$(n-1)$次提问回答说知道了。先从最简单的情况开始研究，即数字1和2。贴着2的那个人，在第一次或第二次提问时，即可答知道了，同时还要看哪一个先被问及。因为他看见是1，便知道自己拿的数字是2。

现在看看2、3的情况，先问贴着3的那个人，因为他可能是1或3，所以回答不知道。假如他是1。这时贴着2的人会说知道(象上面那种情况)。因此，假如他说不知道，这就为另一个人证明了他贴着的是3不是1，在第二次问他的时候，就能答出

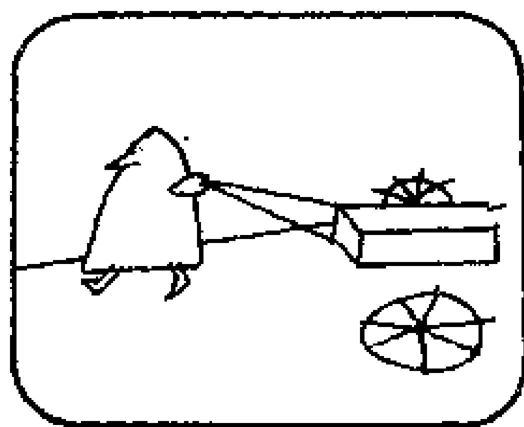
来了。象帽子问题那样，这也可推广到任意两个连续的数字。

完整的解法，你就要知道到底在什么情况下游戏者会在问 n 次的时候答知道，又在什么情况下问 $(n-1)$ 次的时候答知道。你会发现，这取决于哪一个人先被问到，以及 n 是奇数还是偶数。

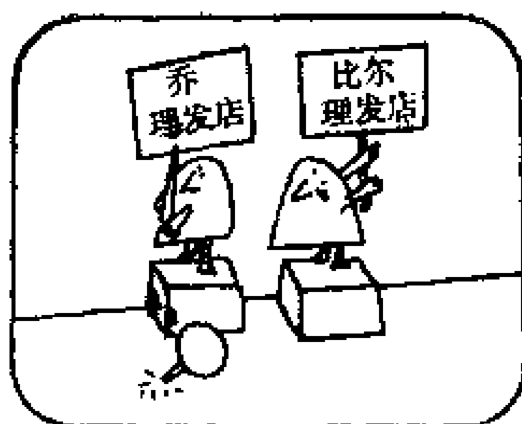
著名的剑桥数学家约翰·霍顿·康韦在最近研究了一种完善的推广。它是这样的：把写有数字的圆牌放在 n 个人的额头上，数字可以是任意一组非负整数；这些整数的总和是 n 或者写在黑板上的少数几个数中的一个，黑板上的数字决不能有两个重复。假定这些人都极其聪明而且诚实，除了自己的圆牌外，每个人都可看到其他所有人的圆牌以及所有写在黑板上的数字。

先问第一个人能否推断出放在他额头上的那个数，假设他说不知道，接着问第二个人，这样连续地循环问下去，直到他们当中有一人说知道为止。康韦断言，问题虽有些不可思议，但这样问下去总会有人说知道。

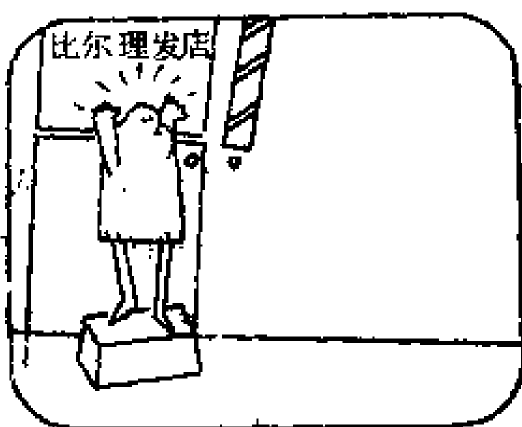
假日理发



约翰驱车到拉斯维加斯去休假，在一个小镇上他的汽车坏了，趁修车的时候，约翰决定去理发。

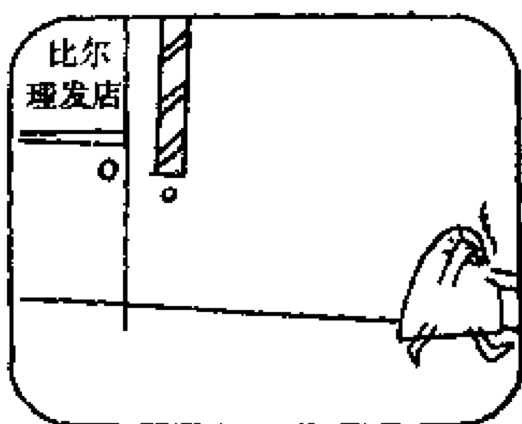


镇上只有两家理发店：乔理发店和比尔理发店。

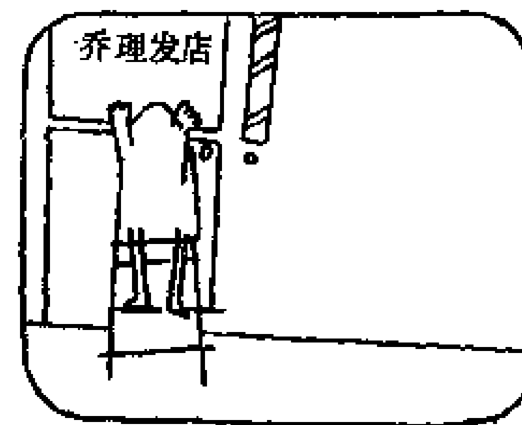


约翰隔窗朝比尔理发店里窥视一下，着实感到作呕。

约翰：多肮脏的店，镜子需要擦擦清爽，地上到处是头发，理发师应该刮刮脸，理发师自己的头发理得真糟糕。

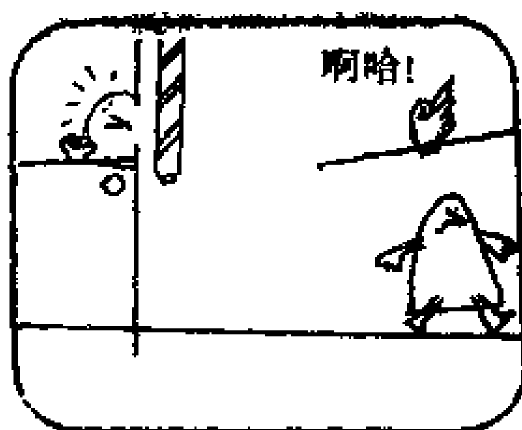


毫无疑问，约翰离开了比尔理发店，去察看乔理发店。



约翰眯起眼睛隔着玻璃往乔理发店里看着。

约翰：真是天差地别。镜子很清洁，地板很干净，理发师的头发修剪得很精致。



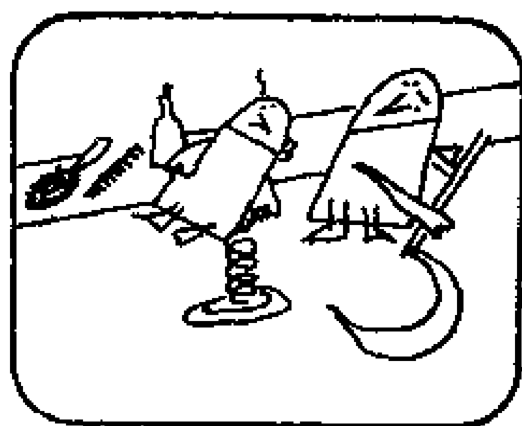
但是，约翰未进去理发，相反地，他走回到肮脏的比尔理发店去理发。这是为什么？

哪一个理发师

理发师都是不替自己理发的。因为镇上只有两个理发师，一个理发师必须为另一个理发师理发，所以约翰聪明地在那家肮脏的理发店里理发，道理是这家店的理发师为那家清洁的理发店的理发师修剪的头发很精细。

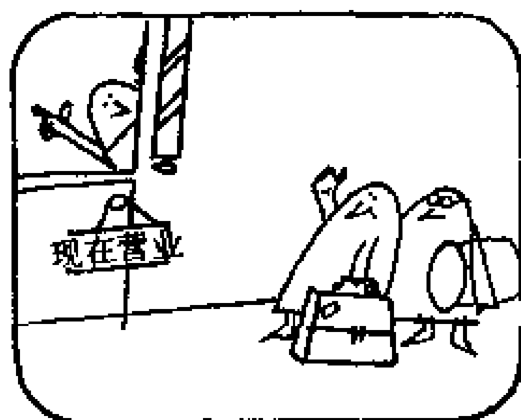
下面的问题与此极为相似。两名矿工在一个煤矿里工作了一整天，下班时走上了地面。其中一人的脸很清洁，另一人满脸是煤灰，分手时互相说声晚上好。脸很清洁的那个人用手帕擦擦脸才抬步回家，而脸上沾满煤灰的那个人不擦脸就径直回家去了。你能解释这一反常的行为吗？

理发店的玩笑



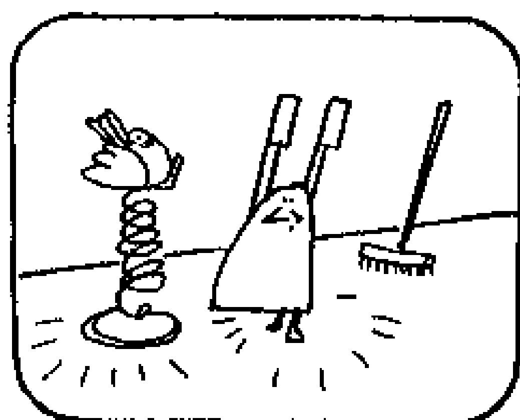
比尔是位健谈的理发师，很难做到让别人先开腔。

比尔：那么你不是住在这个镇上的，唔？我乐意为陌生人理发。

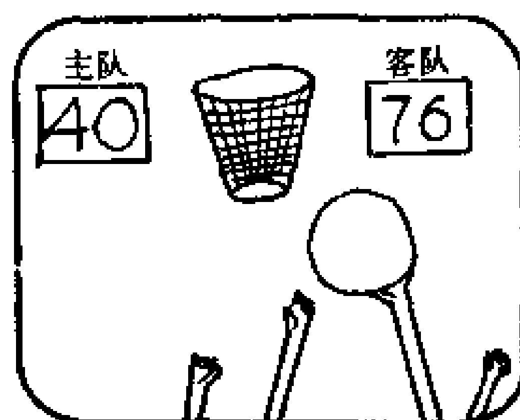


比尔：事实上我宁愿为两个不住在这个镇上的人理发，而不愿意给住在这里的任何一个人理发。

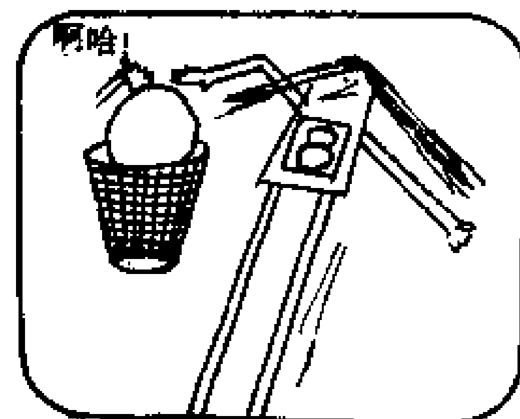
约翰：那是为什么？



比尔：因为我可以得到双倍的钱。



约翰：好吧！刚才的问题算是你把我难住了。不过我有个问题想问问你。十天前，我们学院的篮球队赢了一场球赛，比分是76比40，但是我们球队中没有一个男队员投进一个球，你能告诉我为什么吗？



理发师给难住了，所以约翰作了解释。

约翰：我们的球队里没有一名男的，她们全是姑娘。

奇怪的解答

本节提出的问题，都是在词语含糊的基础上形成幽默的怪题。下面是同样类型的七个问题，可以用来考考你的朋友们。

1．霍华德·尤斯是个古怪的亿万富翁，愿意出50万元巨资赏给赛车比赛中的最后一辆车的司机。有十名司机参加竞赛，但是对尤斯提出的竞赛条件感到很为难。

“我们怎么能进行这样的比赛呢？”一名司机问道，“我们大家都想开得越慢越好，比赛就无法结束了”。

其中一个人突然说道：“啊哈！我知道我们该怎么办。”他是怎么想的呢？

2．怎么使火柴在水下燃烧？

3．一个罪犯带了妻子到一家影剧场去看描写枪击凶杀的西部影片，在放映许多枪炮轰击的场面时，他的妻子被他用枪击中头部而身亡。然后他把尸体带出影剧场，但是没有人去干涉他，他是怎么处置的？

4．奎贝尔教授说，他能够把一只瓶子放在房间中央，再爬进去(crawl into the bottle)。他是怎样爬进去的？

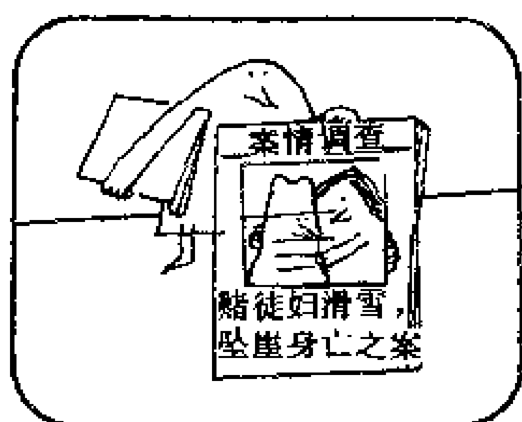
5．尤赖亚·富勒是著名的以色列大巫师，他能在比赛前告诉你任何棒球比赛的比分结果。他的秘密在哪里？

6．“这只鹦鹉”，花鸟商店的店员说，“能够重复它听到的任何话语”。一星期以后，购买这只鸟的某夫人跑到店里说，这只鸟至今还没有说过一句话，但店员说出了他的道理。请解释一下。

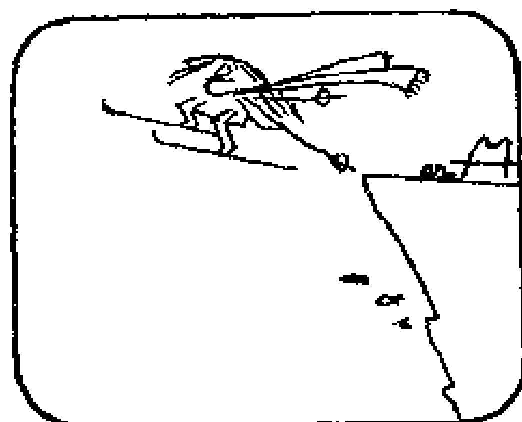
7．一只酒瓶装了半瓶酒，瓶口用塞子盖住，不敲碎酒瓶或者不拔去瓶塞，怎样能把酒喝光？

答案写在书末。

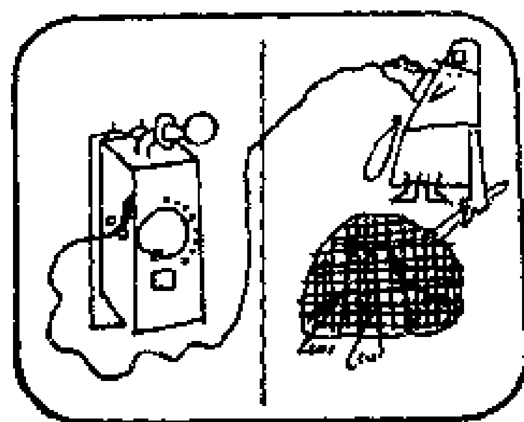
太阳谷的谋杀者



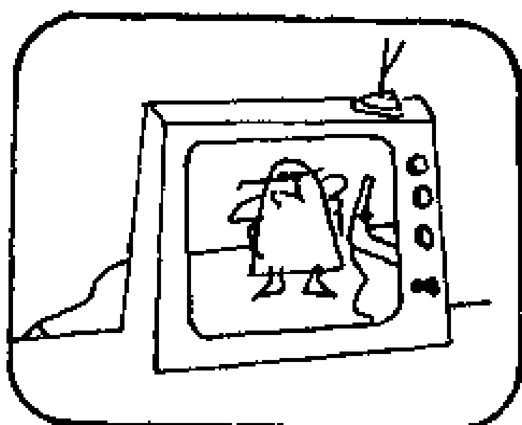
约翰到拉斯维加斯的时候，报纸以大幅标题刊登了当地的一名赌徒和一直伴他在太阳谷滑雪的妻子的事情。



他的妻子在一次滑雪事故中身亡。当她滑落悬崖时，赌徒是目睹她滑落下去的唯一证人。

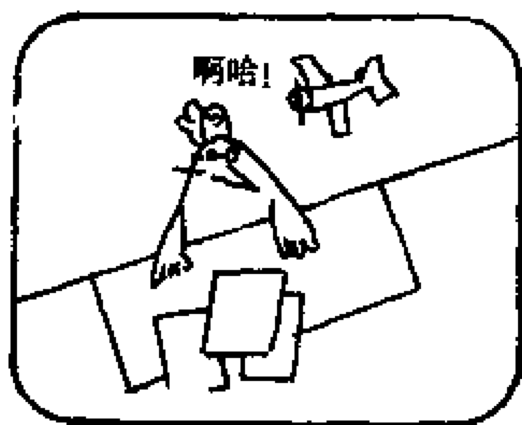


当地的一名职工看到了这则消息，打电话通知爱达荷州的警察当局，把赌徒当作谋杀嫌疑犯抓了起来。



报道者对职工的做法感到惊奇。

该职工在看到这则新闻以前，既不认识这个赌徒或者他的妻子，也没有怀疑这是暗杀行为。那么职工为什么要叫警察呢？



因为他卖给赌徒一张去太阳谷的来回车票，但是给他的妻子只卖一张单程的车票。

单 程 车 票

现在看看你将如何处理下面两个侦探问题。如同上述问题一样，任何一种算法或者计划步骤是解决不了这两个问题的，但只要找到了窍门，就可以马上得出答案。

1．在去旧金山的高速公路上，父亲驾驶着车，而他的小儿子坐在汽车的前座位子上。为了避免同前面一辆突然停下的汽车相撞，他把车子来了个急转弯，由于汽车失去了控制，汽车撞在一个桥墩上。结果，父亲没有受伤，但是小孩撞断了腿。

一辆救护车把他们送进了附近的一家医院，小孩被送到抢救室。外科医生正准备施行手术，突然这外科医生失声叫道："我不能为这孩子动手术，他是我的儿子！"请解释一下原因。

2．下面一个故事选自乔治·盖莫和马文·斯特恩合著的"趣味数学难题"一书，是一本很有趣的习题集。在第二次世界大战

德国占领法国期间。在巴黎的一家旅馆有四个人乘在一部电梯里。其中一名乘客是身穿军装的纳粹军官，一名是当地的法国人，他是地下组织的秘密成员，第三名乘客是位漂亮的少女，第四位是个老妇人。他们相互都不认识。

突然电源发生故障，电梯停住不动了，电灯熄了，电梯内漆黑一团。这时发出了一声接吻的声音，随后是一拳打在脸上的声音，过了一会，电源恢复了，纳粹军官的一只眼睛下面出现了一块新鲜的伤痕。

老妇人想："真是活该！幸喜如今的年轻姑娘们学会了如何留神自己。"

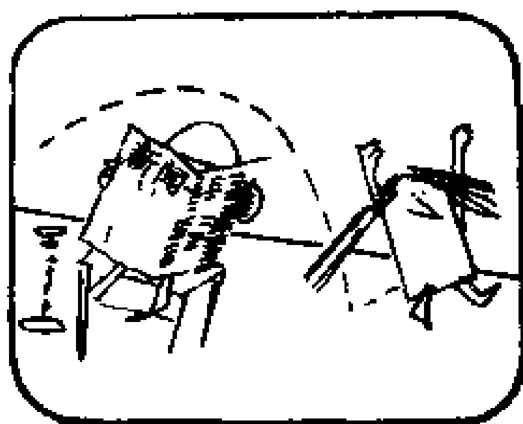
少女独寻思："这些纳粹分子真怪！他没有吻我，想必是吻了这位老妇人或者那位漂亮的小伙子，真不知道是怎么回事！"

纳粹军官在想："怎么啦？我什么事情也没做，可能是这个法国男子想吻这位姑娘，她失手打着了我"。

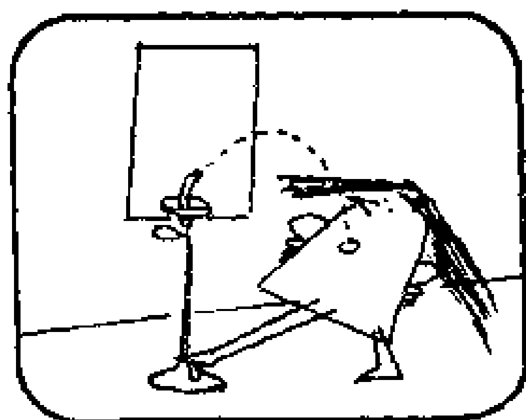
只有那个法国人对发生的事情知道得清清楚楚。你能推测所发生的事情吗？

这两个问题的答案都写在书末，在翻阅答案前，请先试试看。

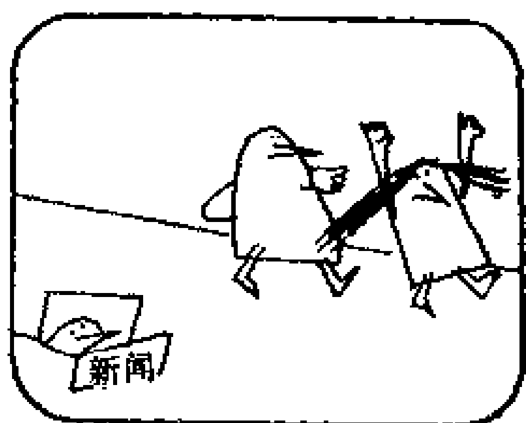
喷泉边的谋杀



约翰在简易机场登记住入维加斯的一家旅馆，当他在看报的时候，一位衣着华丽的姑娘闯进了休息室。



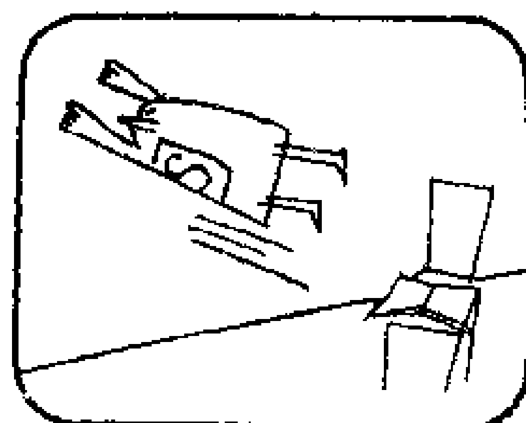
她跑到过滤水喷泉那边喝了好长时间的水，不久就离去了。



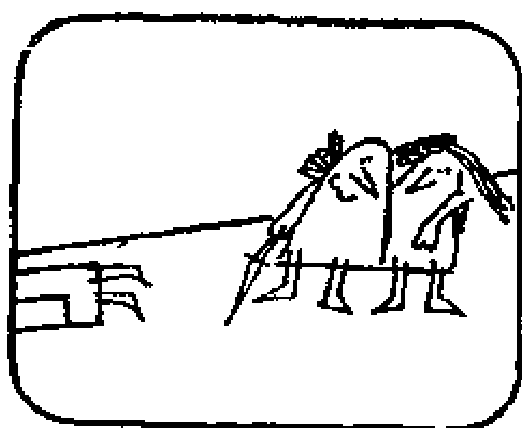
三分钟以后，这姑娘又回来饮了大量的水，这次她后面跟着一个长相很怪的男子。



喷泉后面有一面镜子，当她把头抬起时，看到后面站着一名男子，手里握住一把刀子，高高举起，好象要在后面刺她。姑娘惊叫了起来。



约翰马上跳过去营救。



但是，男子把他的刀放下了，他和姑娘都笑了起来。这究竟是怎么一回事？

镜子的幻觉

这位女子的异常举止很容易解释：她在打呃，那个男子想吓唬她一下，以便让她止住打呃。

下面是测验你有无诀窍的逻辑判断能力的最后一次机会！第一个是执行困难任务问题，而第二个是在虚设的假设基础上取巧的问题。

1．埃及女王把她的一些钻石放在一只带拉盖的盒子里，为防止被盗，她在这只镶有宝石的盒子里边放了一条极毒的活蛇。

一天，一个奴隶在放有这只盒子的屋里只单独呆了几分钟时间，设法偷了几件贵重的珠宝，没有让毒蛇从盒子里钻出来，也没有以任何方式触摸或惊动这条蛇。他手上没有戴什么防护的东西，偷窃只历时几秒钟的时间。当这个奴隶离开屋子时，除了缺少几颗钻石以外，盒子与毒蛇均保持同行窃前一样。这个奴隶是用何种巧妙的方法偷走了这些珠宝？

2．某女士身边没有带她的驾驶执照，不能在铁路交叉口停车，而是不顾单向交通信号，以错误的方向沿着这单向道越过了三条横马路。这个全过程都给一名警察看到了，但他没有去逮住她，这是为什么？

上述答案均在书末。

第五章　过　程

自从计算机革命开始以来，“算法”一词成了数学词典里一个常见的术语。算法就是表示一个过程——它由一系列规定好的步骤组成——这个过程能解出某一问题。你要用一个数去除一个大数字，则可用除法去做。如果不明确地告诉计算机做什么，计算机是一事无成的。因而计算机程序设计的艺术主要是一种构造有效算法的艺术。我们说“艺术”而不说“技术”，这是因为神秘的灵感在发现好的算法方面起着重要的创新作用。

所谓“好的算法”是指一个能以最短时间解出某一问题的算法。使计算机运行是要花钱的、犹如雇用劳力做一项工作要出钱一样。因此，采用有效的(好的)算法是有实际裨益的。其实，数学有一个很有发展前途的分支，叫做运筹学，它是一门关于寻找复杂问题的最有效的解法的学科。

本章选择的“过程”问题，虽然是趣味性的，但你会发觉自己不知不觉地学到了许多深奥的数学概念。例如第一个难题就生动地说明数学家讲两个似乎互不相关的问题是“同构”时所指的是什么意思。某个数字游戏，其策略在结构上竟和玩“井”字游戏*的策略完全一样！接下又说明加拿大数学家利奥·莫塞发明的一个巧妙的文字游戏以及网络游戏都是与上述游戏是同构的。然而所有这些游戏策略都建立在 3×3 魔方的基础上，这个方阵是最古老的组合方面的奇珍之一。

同这些重要概念有关的其它一些问题还包括：解决河马秤

* 原文为“tick-tack toe”，是一种游戏。游戏双方在“井”字的九个位置轮流划上各自的符号，若某一方的三个符号首先凑成一直线则算作获胜——译注

重问题的阿基米德浮体定理；从简单的分配家务事引伸出来的判定论方面一个尚未解决的普遍问题；关于小偷和钟绳的几个经典的组合问题；由“懒惰的朋友”问题引出的重要的图论问题。

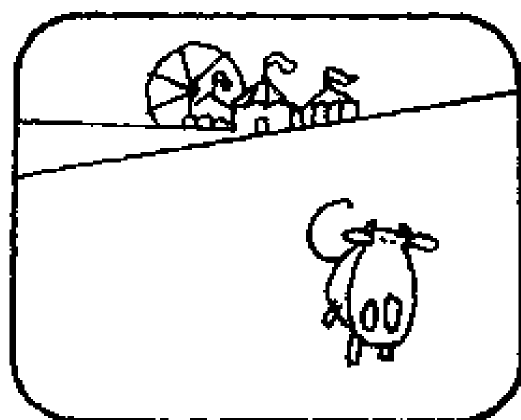
图论所研究的是以线段相连的点的集合。运筹学方面的许多实际问题均能以图为模型。有些问题有着奇妙的解法，例如我们已知如何用“克鲁斯科尔算法”构造的最小生成树。我们还将考虑与此密切相关的另一个问题，即“斯坦纳树问题”，它至今尚未完全解决。由于斯坦纳树有着极广泛的实际应用，所以目前正在开展大量的研究工作，以探求寻找这类树的有效的计算机算法。

斯坦纳树问题属于称为“NP 完全”的那种引人入胜的问题，目前还未发现什么好的算法，也不知道到底是否存在好的算法。从这种意义上讲，这些问题还没有得到解决。最有名的一种寻找 n 个结点的斯坦纳树的算法是这样的：找树所需的时间随着 n 的增大而成指数地增加。事实上，时间增长快到这样的程度：即使结点不多（比如说几百个点），要求出最佳的答案，用计算机也需操作几百万年！

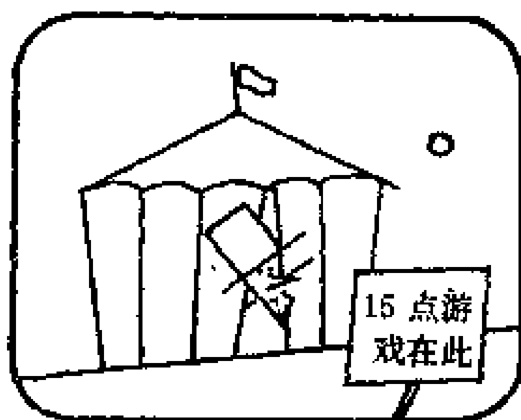
一些“NP 完全”问题相互之间存在着一种奇特的关系。如果发现了其中某个问题的一种有效的计算机算法，则该算法能立即适用于其余所有的问题；若从某个算法看来，根本就不存在有效的算法，那也就为其余所有算法下了定论。数学家们怀疑这后一种情况是否成立。目前正在进行大量的研究工作，以寻求一些可以发现虽非最佳但接近最佳的斯坦纳树的算法。

比起书中其余各章，本章更多地展示了现代研究工作的情况，这些研究工作正由一些在现代数学方面堪称具有最高智慧的人在进行着。

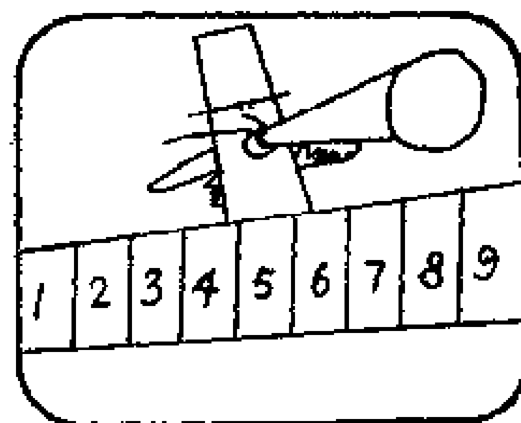
十五的技巧



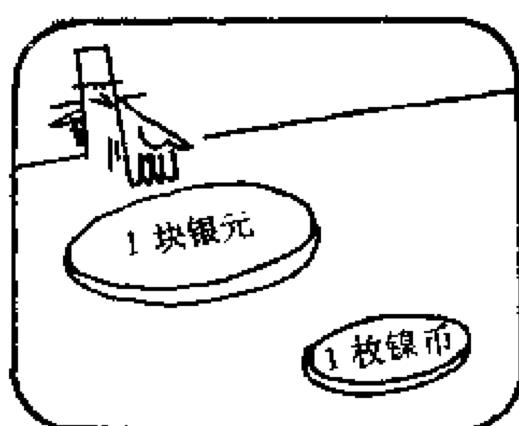
乡村庙会开始了，人人都感到很高兴。



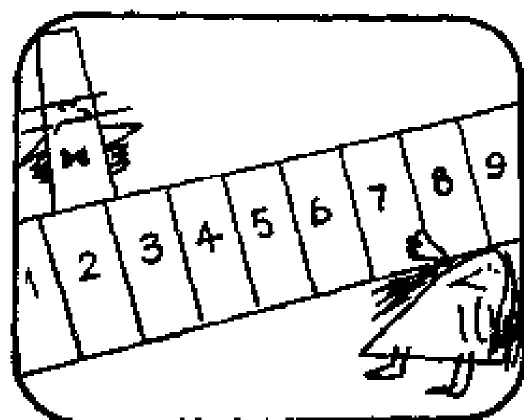
在娱乐场里，今年搞了一种叫做"15 点"的新游戏。



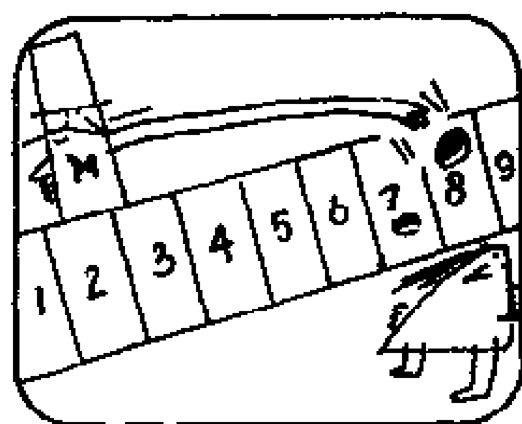
卡尼先生：来吧，老乡们。规则很简单，我们只要把硬币轮流放在 1 到 9 这些数字上，谁先放都一样。



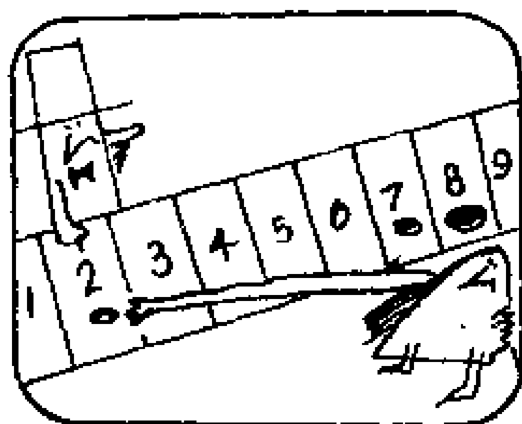
卡尼先生：你们放镍币，我放银元，谁首先把加起来为 15 的三个不同数字盖住，那么桌上的钱就全数归他。



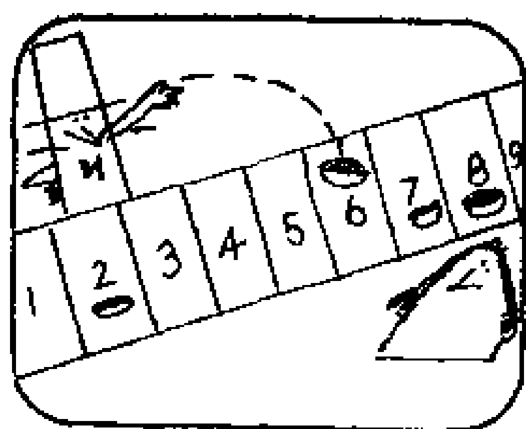
我们先看一下这一次游戏的过程。某妇人先放，她把镍币放在 7 字上，因为 7 已盖住，他人就不可再放了。其它一些数字也是如此。



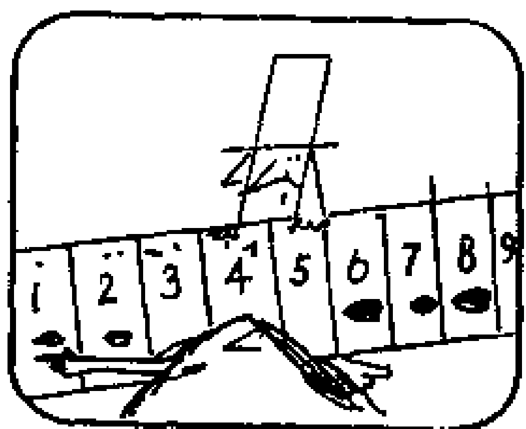
艺人卡尼把一块银元放在 8 上。



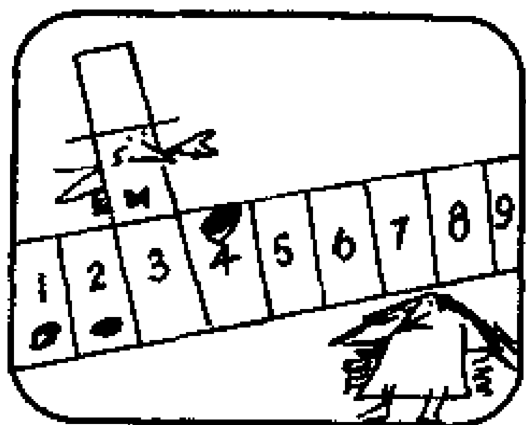
妇人第二次把镍币放在 2 上，这样再用一枚镍币放在 6 上就可加为 15，于是她以为就可赢了。



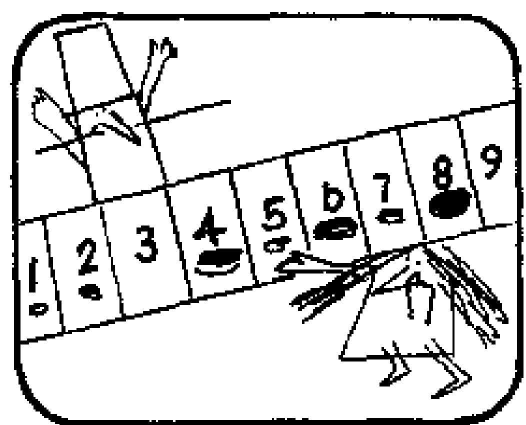
但艺人第二次把银元放在6上，堵住了她的路。现在，他只要在下一轮把银元放在1上就可获胜了。



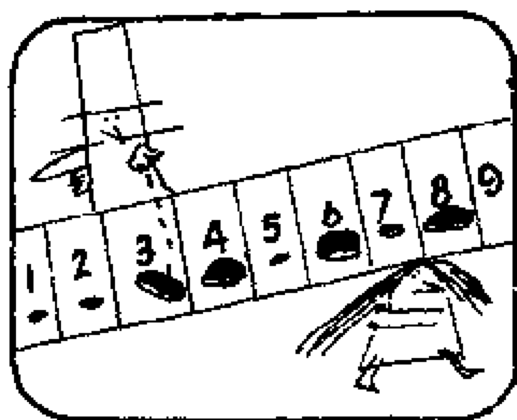
妇人看到这一威胁，便把镍币放在1上。



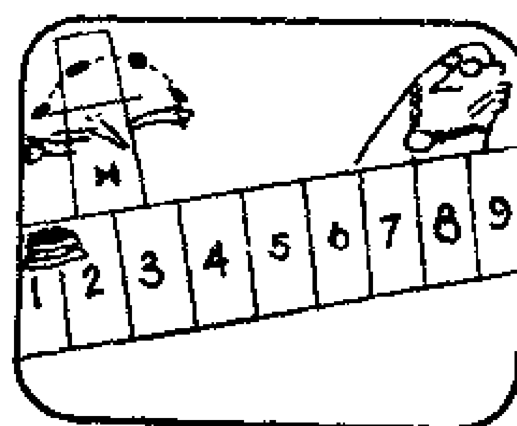
那个艺人下一轮笑嘻嘻地把银元放到了4上。妇人看到他下次放到5上便可赢了，就不得不再次堵住他的路。



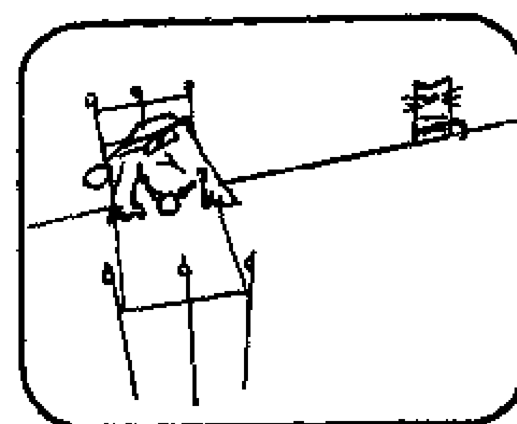
所以她把一枚镍币放在5上。



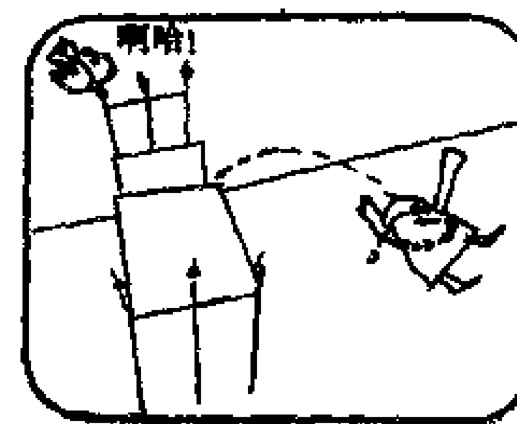
但是艺人却把银元放在3上，因为8+4+3=15，所以他赢了。可怜的妇人输掉了这四枚镍币。



该镇的镇长先生曾被这种游戏所迷住。在观察了很长时间以后，他断定艺人用了一种秘密的方法，使他比赛时怎么也不会输掉，除非他不想赢。

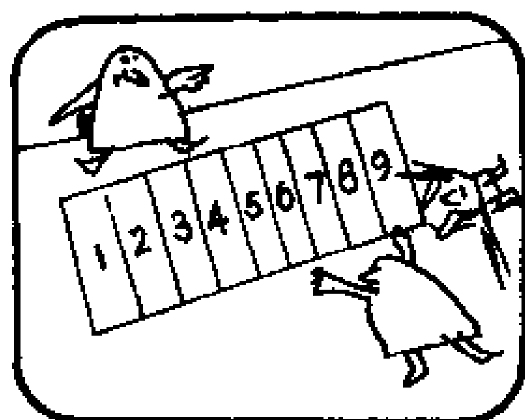


镇长彻夜未眠，想研究出这一秘密的方法。



突然他从床上跳了下来。

镇长：啊哈！我早知道那人有个秘密方法，我现在晓得他是怎么干的了。真的，顾客是没有办法赢的。



这位镇长找到了什么窍门？你或许能发现怎么同朋友们玩这种“15点”游戏而不会输一盘。

“井”字游戏

要解决“15点”游戏的道理，其诀窍在于看出它在数学上是等价于井字游戏的！使人感到惊奇的是，该等价关系是在著名的3×3魔方*的基础上建立的，而3×3魔方却在中国古代早已发现。

要了解这种魔方的妙处，先列出其和等于15的所有三个数字的组合（不能使两个数字相同，不能有零）。这样的三个数字组只有八组：

$$1+5+9=15$$
$$1+6+8=15$$
$$2+4+9=15$$
$$2+5+8=15$$
$$2+6+7=15$$
$$3+4+8=15$$
$$3+5+7=15$$
$$4+5+6=15$$

现在我们仔细观察一下以下独特的3×3魔方：

2	9	4
7	5	3
6	1	8

* 魔方，亦称“幻方”，即“纵横图”，早在中国汉代就已有三行的“纵横图”，称为九宫——译注

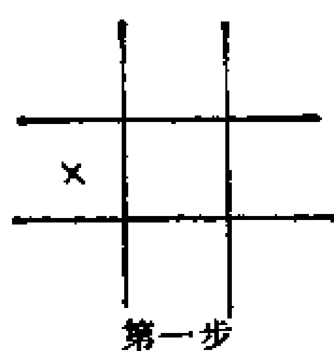
应当注意的是，这里有八组元素，每一组都在一条直线上：三行、三列、二条主对角线。每条直线等同于八组三个数字(它们加起来是15)中的一组。因此，在比赛游戏中每组获胜的三个数字，都由某一行、某一列或某条对角线在方阵上代表着。

很明显，每一次游戏同在方阵上玩的“井”字游戏是同理的。那个艺人在一张卡片上画幻方图，把它放在游戏台下面，只有他能看到(别人是无法看到的)。只有一种位置的幻方图结构，但是它当然可以旋转到四种不同的位置，而每一种位置可通过镜子反射，这样就产生了另外四种形式，共八种形式。在玩这种游戏时，这八种形式中的每一种都可用作秘诀，效果都是一样的。

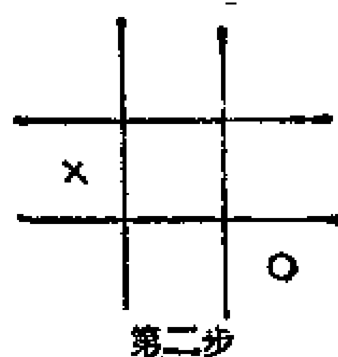
在进行这“15点”游戏时，东道主暗自在玩秘密卡片上的相应的“井”字游戏。玩这种游戏是决不会输的，假如双方都正确无误地进行，最后就会出现和局。然而，参加游艺比赛的人总是处于极不利的地位，因为他们不掌握“井”字游戏的秘诀。因此，东道主很容易设置埋伏，使其必然获胜。

为了详细了解方阵的用法，让我们把本节图片的那一局比赛过程表现一遍。详情可见图1。那个艺人即使是后走，他也能在第六步设一埋伏，以确保他在第八步能获胜，而不管那妇人在第七步如何走法，任何精于玩这种“井”字游戏的人，借助于这一奇妙的方阵总可在“15点”比赛中常胜。

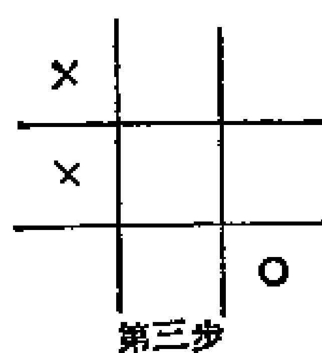
“同构”(即数学上的等效)这一概念，是数学中最重要的概念之一。在不少场合中，一个难题往往可以把它变换成另一个同构的、业已解出的问题，从而轻而易举地将原来的问题加以解决。随着数学发展得日趋复杂，从“同构”的发现，不仅促使数学得到简化而且使数学也将变得越来越统一了。举例来说，1976年在著名的四色定理得证以后，在其它数学分支中与之“同构”的数十个假说也就同时得证了。



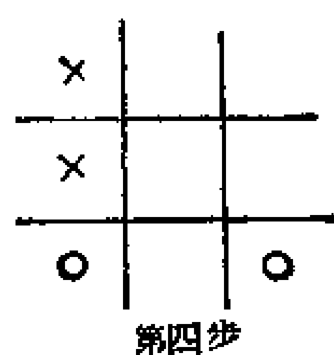
第一步



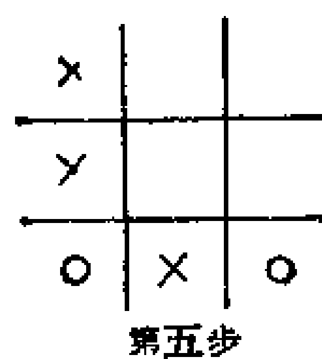
第二步



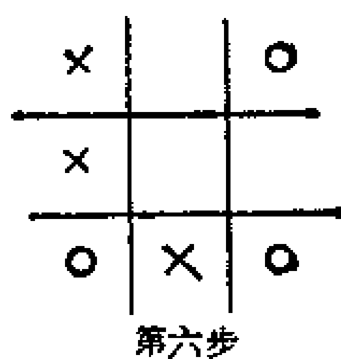
第三步



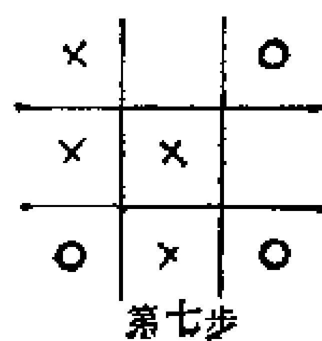
第四步



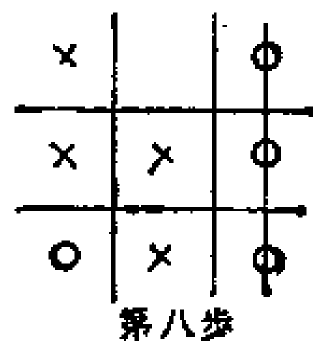
第五步



第六步



第七步



第八步

图 1

为进一步理解同构基本概念，请研究下面的这个文字游戏。游戏用九个单词进行：HOT、TANK、TIED、FORM、HEAR、BRIM、WOES、WASP、SHIP。

进行游戏的两个人轮流勾取一词并做上标记，首先勾取三个含有同一个字母的人就是胜者。人们可能将之玩了好多遍还不知道他就是在玩"井"字游戏。如图 2 中那样，把这些单词写在井字游戏板的方格里，很容易看出"同构"关系。仔细观察一下，可以发现，含有一个公共字母的每三个单词都在一条直线——水平线、垂直线或者对角线上。所以说，玩这种文字游戏是同玩"井"字游戏或者玩"15 点"游戏完全是一码事。

HOT	FORM	WOES
TANK	HEAR	WASP
TIED	BRIM	SHIP

图 2

看看你能否想出能用做这个游戏的其它一些九个单词的集合。当然这些词不一定用英语。另外，为什么不可用图 3 那样的符号组来做游戏呢？

图 3

作这类游戏的最好的办法，是把每个数字、单词或者符号写在九张空白纸卡上。将这些纸卡面朝上地摊在桌子上，参加游戏的两个人轮流抽取纸卡，直到有一人获胜为止。

当你完全掌握了上述各种游戏的同构关系以后，请研究一下下面这个网络游戏。这个游戏是在图4所示的公路图上进行的。

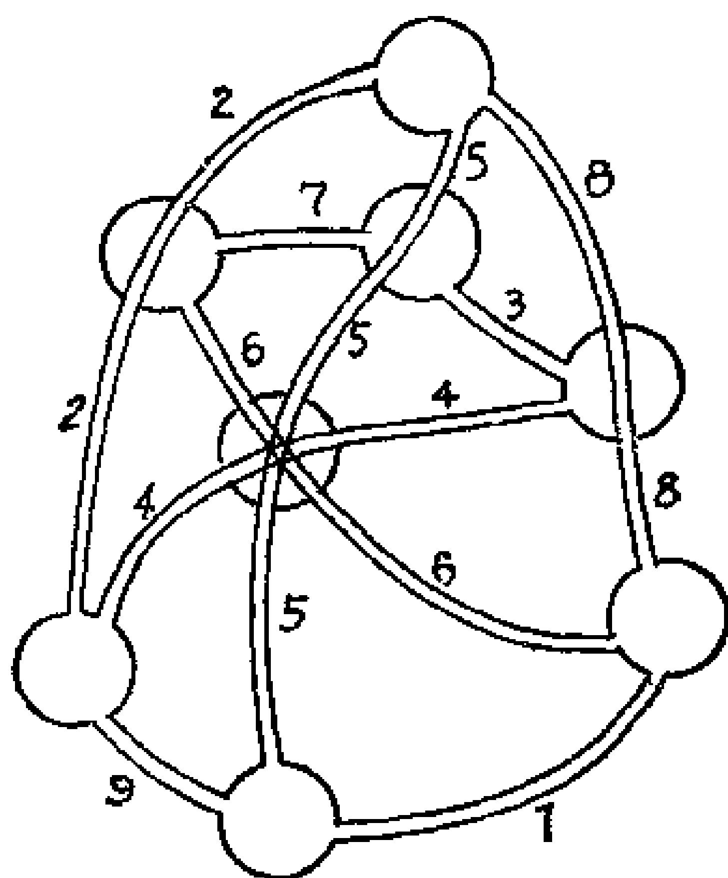


图 4

八个城镇由一些公路连通着。游戏的一方拿某种颜色的铅笔，另一方拿另一种颜色的铅笔。他们轮流用笔将某一条路的全路程涂上颜色。请注意，有些公路是贯穿城镇的。如遇到这种情况，那么整条公路都要涂上颜色。首先，将三条通入同一城镇的公路都涂上颜色的人就是胜者。粗看一下，似乎这种游戏同上面分析过的几种游戏中的任何一个都没有关系。而实际上这也是与"井"字游戏同构的。

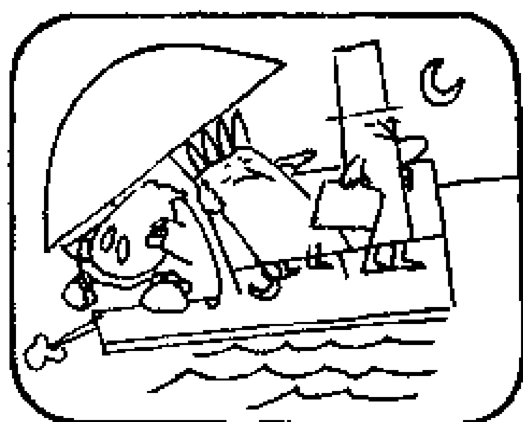
象图 4 那样把公路编上号，就可建立起同构关系，每一条路对应着幻方里的一个编好号的方格，地图上的每个城镇则对应于幻方里由三个方格连成的一条直线。同上面那些例子一样，同构关系是完全的。任何一个能熟练地玩“井“字游戏的人，同样能熟练地玩这种地图着色游戏。

7	12	1	14
2	13	8	11
16	3	10	5
9	6	15	4

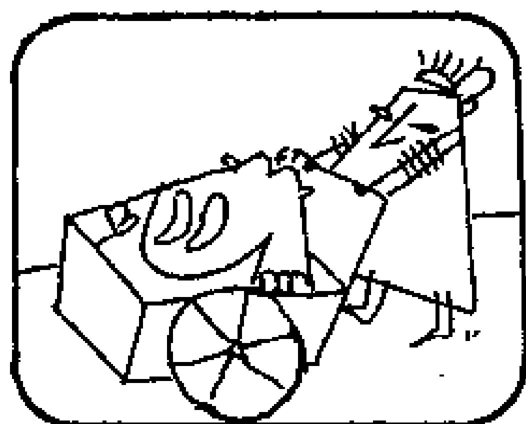
图 5

图 5 是 880 种（未考虑旋转和反射）不同的 4×4 方阵当中的一种。直线上的数字之和为 34。该幻方能不能给出一个玩 34 游戏的秘诀？也就是说，游戏时每个人轮流从 1 至 16 里挑选一个数(同一个数不能挑选两次)，谁先得到加起来等于 34 的四个数，谁就获胜。这种游戏同在幻方上玩 4×4“井”字游戏是不是同构？回答是否定的。你知道原因吗？是否可以修改一下井字游戏的规划，使除直线以外的四格形式也能取胜，以便在这两种游戏之间建立一种同构关系？

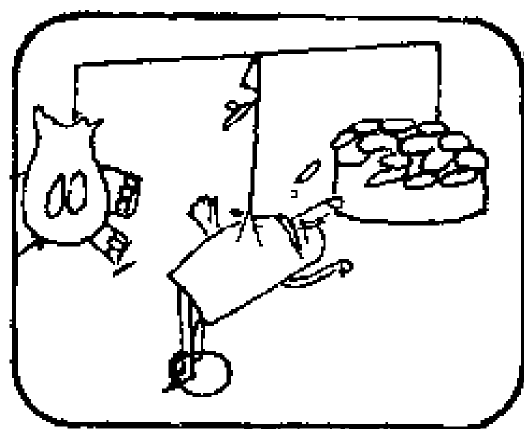
关于河马的难题



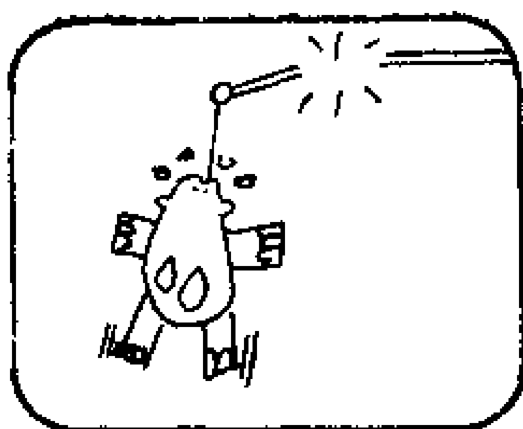
很多年以前，在某一个生活富裕的部落里，它的首领对该部落的那头神河马照料得十分周到。



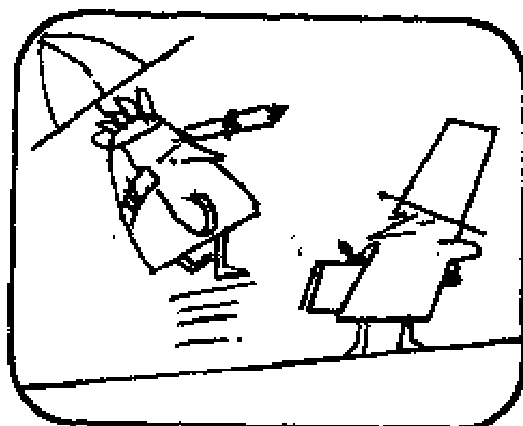
首领每逢生日，他和他的收税官便带着这头畜牲一起乘上华丽的彩船，沿河游览到收税营房。



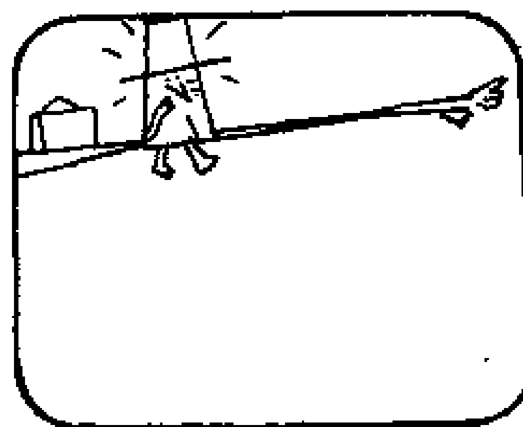
当地的习惯是，交给首领的金币数目必须同这头神河马的体重相等。此外，在收税营房的边上有一台大天平，它的一边可以载上河马，而用另一边则以金币来平衡。



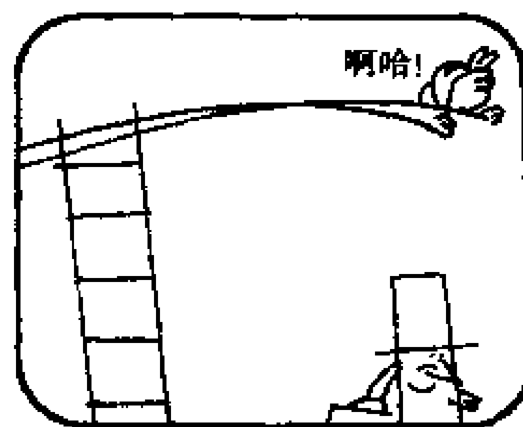
首领把神河马喂养得很好，河马越长越肥壮，以至有一年天平的悬梁竟然给秤断了，而这根悬梁须化几天才能修好。



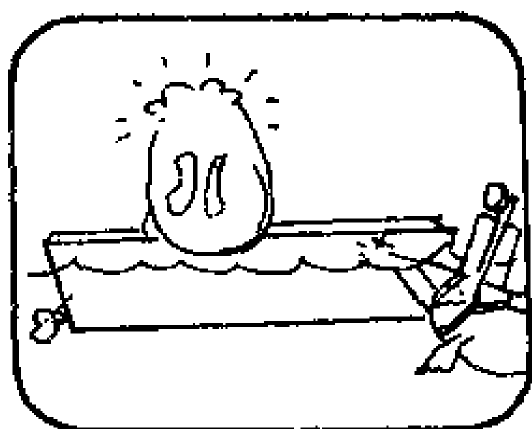
首领顿时变了脸色，他对收税官说："我今天要把金币收上来，而且一定要如数收齐。如果在太阳落山之前，还想不出办法，我就杀你的头。



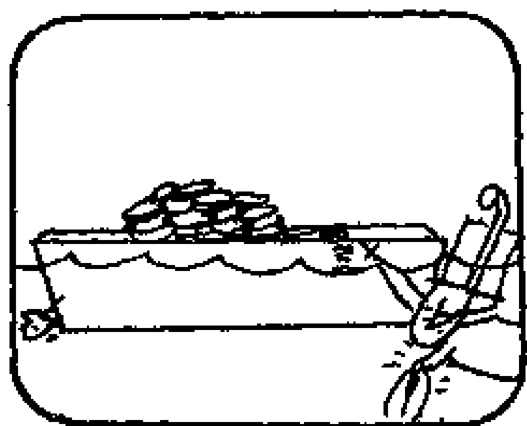
可怜的收税官被吓糊涂了。



他还是集中精力，苦苦思索几小时之后，突然想出了一个好主意。你能猜出他想的是什么主意吗?



其实办法很简单。收税官先单独把河马放在华丽的彩船上，在船的外侧标上水位记号。



然后他把河马驱离彩船，再在彩船里装金币，直到水位达到刚才做标记的地方。这样一来，船上装的金币数量肯定等于河马的体重了。

"知 道 了!"

根据阿基米德发现的原理，浮体排开一定体积的水，该水的质量等于该浮体的质量。所以把河马载入彩船的时候，船就往下浸入水中，被排开的水在质量上等于该河马的质量。

下面是一个与此相关联的问题。假定彩船浮在一个刚好能容纳它的小水槽里，这样就能正确地测出水槽的水位。河马则用同等质量的金币来代替，此时在水槽一侧的水位做上标记。

现在假设把金币都抛出船外沉入槽底，我们知道，彩船吃水线将会降低，那么水槽的水位怎么变化呢？水位是升高还是降低？

这个问题连物理学家都难以回答。有的会说，水槽的水位将保持不变；有的会说，水位将会升高，因为沉下去的金币会把水排出。这两种回答都不对。

如欲弄清道理，我们可以回顾一下阿基米德原理。任何浮体都能排开一定体积的水，其质量等于该物体的质量。金比水重得多，所以当它放在彩船里的时候，它排开的水的体积要比金本身的体积大得多。但是，当金沉入槽底时，它排开的水量只等于其体积。由于这时排开的水量比金币装在船里的时候排开的水量要小得多，所以水槽里的水位肯定降低了。

物理学家乔治·盖莫有一次用下面这种巧妙的方式，解释了这个问题。宇宙当中有些星星，是由其密度是水的密度几百万倍的物质构成的。一立方厘米的此类物质，要重好几公吨。假如有一立方厘米的此类物质从船上扔出沉入槽底，它只是排开一立方厘米的水——容积甚微，因此，水槽里的水位会大大地下降。用金币的情况完全一样，只不过水位降低要小得多。

金币从彩船上扔出以后，假定在船侧重新做上一个水位标记，而河马要到水槽里游玩。在河马进入水里时，如果水槽的水位升高了2厘米，那么这水位高过彩船上的水位标记多少？

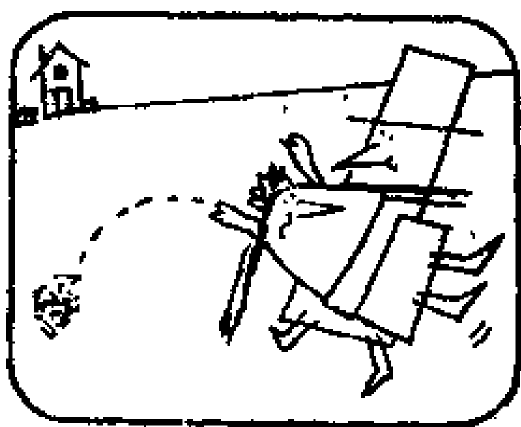
请想象一下当你喝瓶里金鸡可乐时的情景。你想在瓶里留下的可乐量，恰好等于整瓶容量的一半。一个简易的办法是，请喝到使瓶里的倾斜水平液面达到瓶底与瓶侧相交处为止。

下面是个类似问题，但解的步骤不同。有一只透明的玻璃瓶，形状不规则，里面盛有某种强酸，瓶侧只有两个标记，上标记指明是10升酸，下标记指明是5升酸。

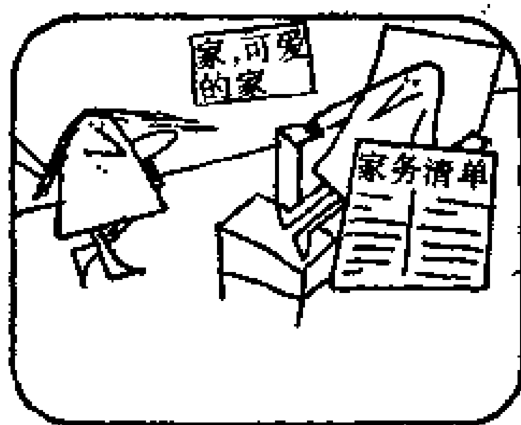
有人已经用过了少量这种酸，但具体用了多少不知道，所以液位在10升标记下面一点，你想准确地从瓶里倒出5升酸，以便做试验。这种酸很危险，而且极易挥发，所以不能将之倒入其它测量容器里。你用哪种简易的方法能够保证从瓶里准确地倒出5升酸？

聪明的办法是，先往瓶里丢进一些玻璃弹子，使液位升到上标记。然后只需倒出酸，使液位降至下标记就成了。

分配家务

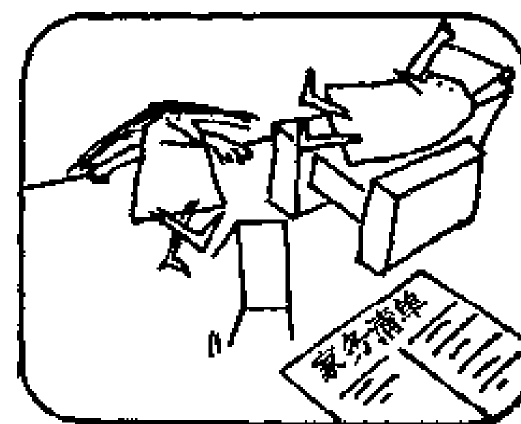


巴斯塔·琼斯夫妇新婚不久，各自都有固定的工作，所以一致同意共同分担家务。

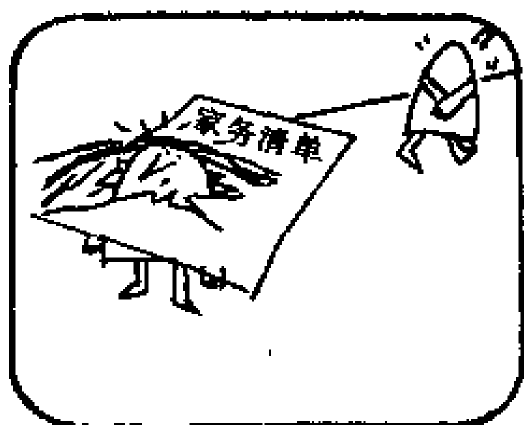


为了公平地安排家务，两人把每星期家里必须做的各项家务列成一表格。

巴斯塔：我已划出了一半的项目，亲爱的，剩下的那些家务该是你的了。

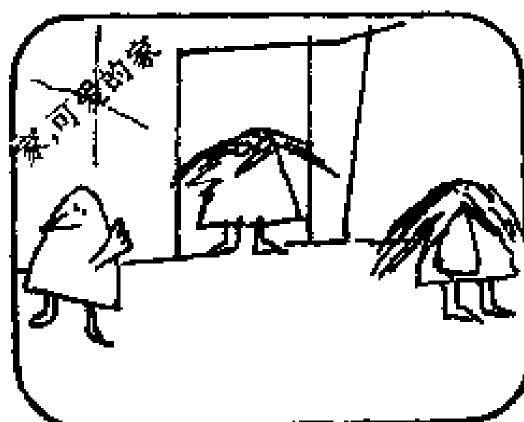


珍妮特：不，巴斯塔，我认为你这样分配是不公平的，你把脏活都推给我做，自己却拣轻松的事干。



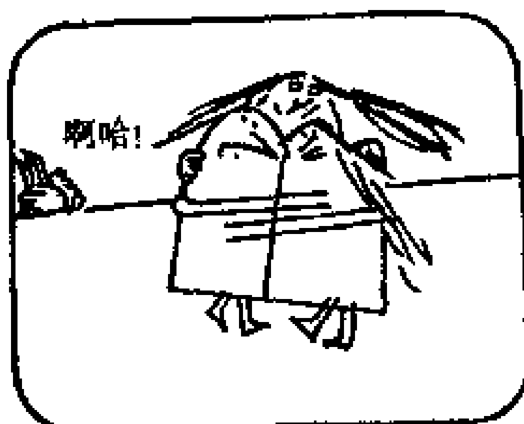
于是，琼斯夫人拿过了表格，把自己想做的家务事做上记号。但是，巴斯塔是不会同意的。

珍妮特：假如这些家务，你想都让我做，那就也太不讲理了。



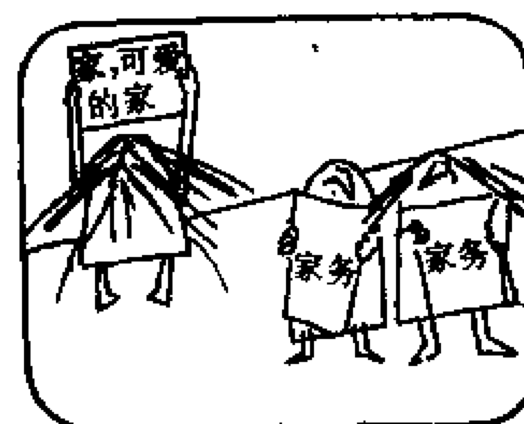
正当他们争论不休的时候，门铃响了，进来的是琼斯夫人的母亲。

史密斯夫人：两个宝贝在吵什么呀？我一走出电梯就听见你们在嚷嚷。

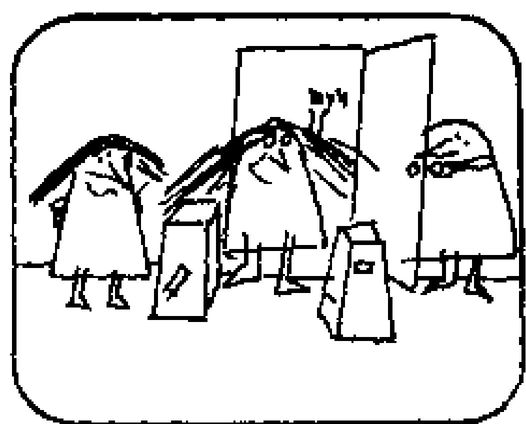


母亲听完巴斯塔和她女儿说出的原因之后，突然笑了起来。

史密斯夫人：我正好想出一个好办法，我告诉你们怎样分配家务。保证你们两人都满意。



史密斯夫人：你们中的一个把这张表格分成两部分，当然你自己会乐于拿随便哪一份的。然后让第二个人挑取他(她)最愿意要的那一半。



但是，一年之后当母亲搬进公寓来住的时候，事情就不那么简单了。母亲同意承担三分之一的家务劳动，但是他们无法决定如何在三个人当中公平地分配家务。你能给他们提出分配方案吗?

公平合理的分配

前面作过解答的合理分配问题，一般是用两个人分一只烧饼的形式出现的，要把烧饼分给两个人，使得每个人都满意地认为自己至少得到半只饼。上面没有解答的问题跟在三个人之间分一只烧饼，而使人人满意地觉得自己至少分到三分之一的问题是一样的。

公平地把一只烧饼分成三份这一难题，可以这样来解决：一个人拿一把较大的刀在烧饼上方慢慢移动，烧饼可以是任何一种形状，但是刀一定要这么移动，使某一边的烧饼量从零逐渐增加到最大。当这三个人中任何一个人认为这把刀处的位置正好使切下第一片的烧饼等于整块烧饼的1/3。他(她)就喊："切!"这时刀马上切下，喊叫的那个人就拿这一份烧饼。由于他(她)已满意地觉得自己得到了1/3，就退出以后的分配过程。当两个人或三个人同时喊"切"的话，则切下的那一份烧饼随便给谁都一样。

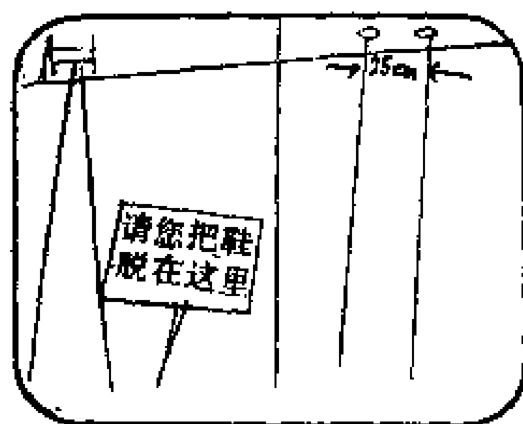
其他两个人当然满意地觉得剩下的至少有2/3，这样问题就还原到上例讲的那种情况了，只要一个人切，另一个人选，烧饼便可公道地分掉。

很显然，可以推广到N个人。随着刀子在烧饼上方移动，第一个喊"切"的人拿第一次切下的那块饼（或者把这块饼同时

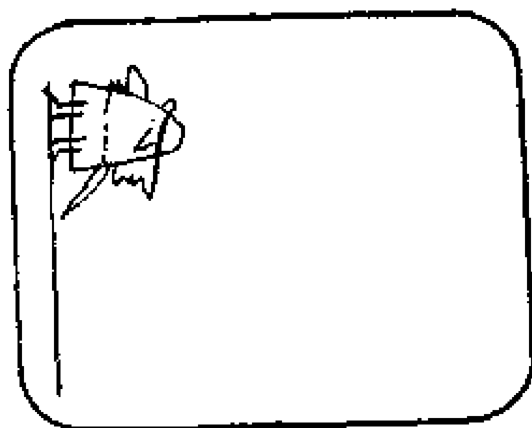
给予喊“切”的几个人当中的任何一个人)。然后在其余 $N-1$ 个人重复以上步骤，这样一直进行下去，直到剩下两个人。最后剩下的烧饼，两人可以象上例讲的办法那样来分，也可以继续用刀移动的办法来分。这个一般化的解题方法是用数学归纳来证明算法的一个很好范例，很容易看出，这种算法如何能应用于把一系列家务事分摊给几个人，并使得人人感到满意，觉得他分担的家务是公平合理的。

剑桥大学的数学家约翰·H·康韦研究了参如分配者所要求的满意条件更高的情况下的合理分配问题。如果不是采取使每个人都觉得自己至少分得了公道的一份的这一办法，有无其他办法可使每个人确信，别人分得的那份不比自己所得的那份多？你仔细想过以后，就会发现，假如有三个人或者更多的人参加分配，上述算法是不能作出这一保证的。当参加分配的人只有三个人的时候，康韦等人已对这一更严格的问题找到了解决办法。但是，就我们所知，假定有四个人或者更多的人参加分配，这个问题还无法得到解决。

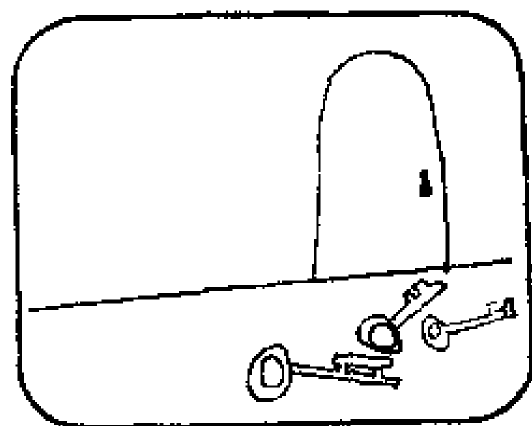
杂 技 扒 手



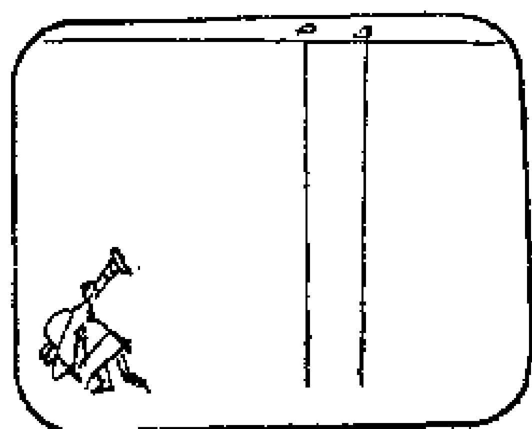
在一座中世纪教堂的钟楼上，有两根拉钟套索，这是无价的古物，它们穿过高处天花板里的两个小孔，小孔相距25厘米，刚好允许这两根套索穿过。



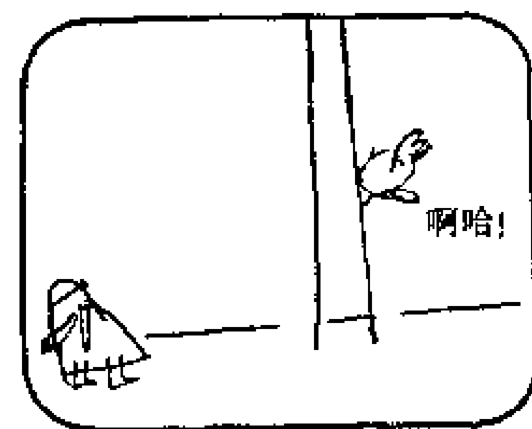
托尼原是个走绳索的杂技家，后来变成了小偷。他想用刀把这两根套索割断偷走，而且想尽可能偷去越长越好的绳子。



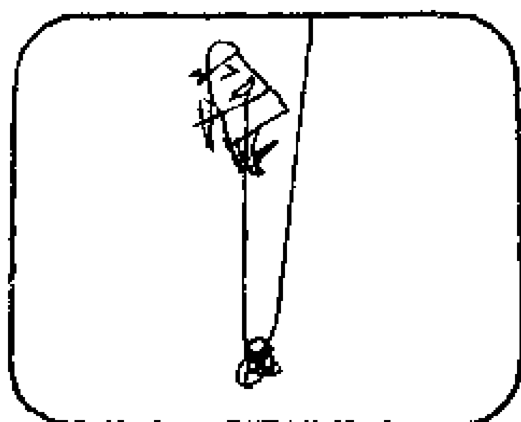
托尼：我应怎么做呢？我无法进到上面的那个房间里去，因为那门上了三重锁。



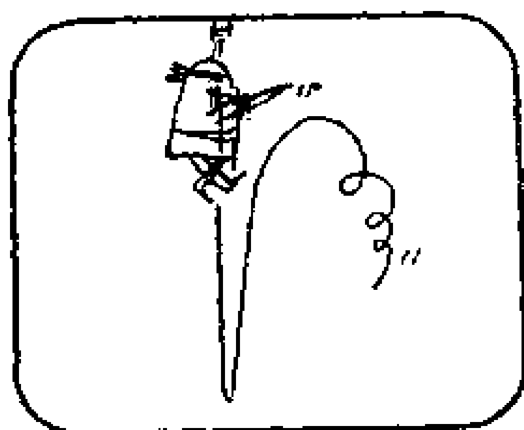
托尼：我必须攀住套索往上爬，能爬多高就割断多长。但天花板是那么高，假如我爬了三分之一的高度割断套索，我摔到地上时，非得把腿摔断不可。



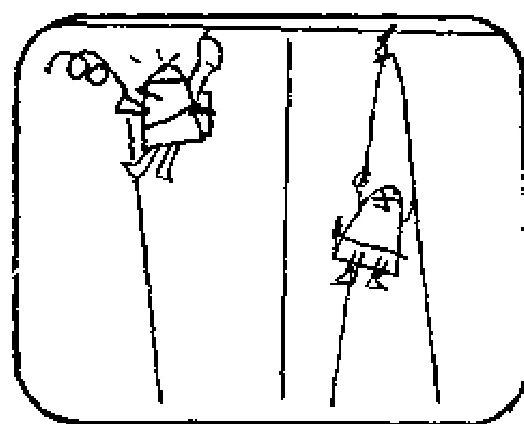
托尼想了许久，终于想出了一个几乎可把这两根套索的全部都偷走的办法。假如你是他的话，你将怎么做呢？



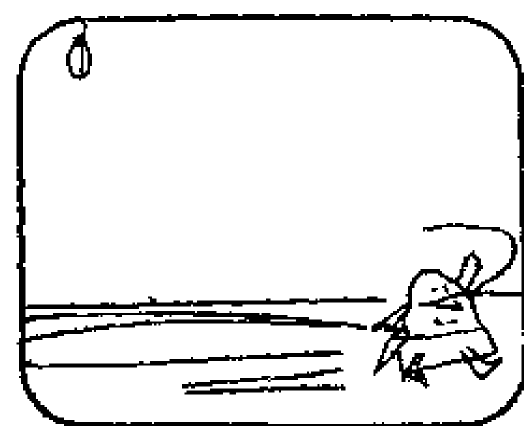
托尼想的办法很乖巧。他先把两根套索的下端缚在一起，然后爬到一根套索的顶端，假设这根套索为 A。



当他爬到顶端时，把套索 B 在天花板下约半米处割断，然后把 B 套索的剩下部分打个环。



接着托尼把一只手臂伸进这个环，吊在空中，此时将套索 A 在靠近天花板的地方割断，小心不让套索掉下去。以后他就把套索 A 穿过那环，并一直往下拉，直到把结在一起的两端拉到顶上。



现在他可以沿着双股的套索滑下来了，滑下后把套索从环里拉出，这样就拿到了整根套索 A 和差不多是整根的套索 B。这事你能做到吗？

这一虚设的问题不够严密，所以不止有一个解法。刚才的解法可能是最实用的，但是你还可以想出其它许多小偷可以使用的办法来，甚至比上述办法更好。

例如，小偷可以象图 6 那样在套索 B 的顶端打一个缩结，他吊在 B 上，在顶端将 A 割断，并让割断的这头掉下去。然后，他在 x 点处割断缩结的当中一股。凡是登山运动员都知道，在他沿套索 B 滑到地面的过程中，这个缩结仍然会保持原样。摇动套索 B，会使缩结解开，这样小偷就拿到了整条套索 B，只差顶部的一小段，如图 6 所示。

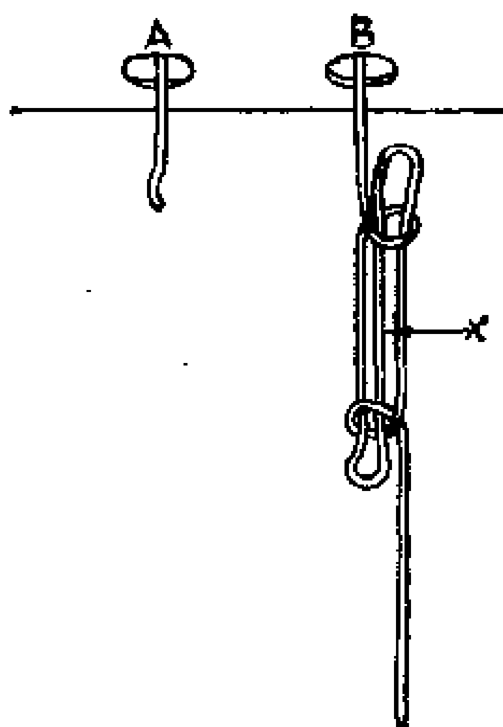


图 6

另一种办法是：小偷爬到套索 A 的顶端，一只手抓住 B，而将身体重量落在 A 上，然后用刀轻轻在顶端割 A，一直感到套索快要割断为止。接着他把 A、B 拼在一起，身体吊在这两根套索上，同轻轻割 A 时的情况一样，在顶端割 B。这两根快割

断的套索支承着他的体重，而他却沿这两根套索朝下滑。滑到地面后，他便使劲地把每根套索齐根拉断。

第三种办法是假定天花板的两个孔比较大。小偷先把 A、B 套索的下端结在一起，并爬上 A，在最上端割断 B，然后把其一端向上塞入该套索的孔里。当由上面进入 A 套索的孔里时，他抓住 B 的上端，通过孔往下拉，一直拉到使割断的一端接近地面，打结处接近 B 套索的顶部孔附近。现在他可以在 B 孔下面把套索 B 的上端和在天花板附近的 A 绳的部分抓在一起，该部分原来套索在 A 的底部。他一方面吊在双根的套索上在顶部割断套索 A（直接在其孔的下方进行），另一方面沿着双根的套索滑下，最后把套索拉下来。

下面是前面方法的一种巧妙的变相。套索在底部不结在一起，小偷沿套索 A 上爬，割断 B，并把套索一端向上穿进 B 孔而从另一孔里拉出，然后把该端打成环，象图 7 那样扣牢。接着，小偷转移到套索 B，把 A 割断，把 A 的一端缚在环扣上，他沿 B 滑下。现在他只要拉 A 就行了，套索 B 会滑过它本身打的环，这两根套索即可从天花板里拉出。

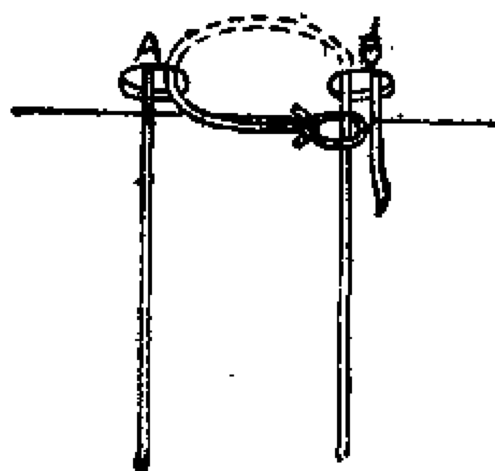


图　7

另外还有一种方法。小偷爬上套索 A，在 B 的顶部系一环，人吊在环上，割断 A，把 A 的一端穿入孔，并从 B 套索的孔里拉出，将这一端缚在环上。这样人吊在两根套索上，在环上方的

顶部割断 B，然后靠这两根套索滑下，再拉动套索 B，就可偷得这两根套索。

上述一些方法中，有的无疑要撞响钟，小偷就要被抓住。最初那个办法的好处之一是，小偷吊在环上之前，可以先轻轻拉住套索 B，这样可以避免撞响钟 B。当然，在他先爬 A 时，爬之前也要慢慢拉住它。

有许多经典的程序性的难题，十分类似于过河一类问题，涉及到需使用长长的绳索，绳索绕过滑轮，而绳索的每一头装只箩筐。下面这一问题是路易斯·卡罗尔最得意的一个题目。

皇后和她的儿子、女儿被监禁在一座高大城堡的最高一间房子里，窗外有一个滑车，滑车上有一根绳索，绳索两端各有一只箩筐，两箩筐的重量相等。窗外的箩筐是空的，地上的箩筐里有一块重量为 30 公斤的石头，石头当作平衡锤。

滑车有足够大的摩擦力，在箩筐里如被放下的任何一个人，只要其体重不比另一箩筐重 6 公斤，则箩筐是绝对安全的。如果重量差超过 6 公斤，那么他们下降时的速度会使他们因在城堡脚下箩筐与地面碰撞过激而受伤。当然，一个箩筐向下降落时，另一个箩筐就升高至窗口。

皇后的体重是 78 公斤，公主重 42 公斤，王子重 36 公斤，那么他们能安全到达地面的最简单（即指用最少的步数）的办法是什么？箩筐的大小足够容纳任何两个人，或者是一个人和那块石头。没人协助他们逃走，他们也无法通过拖曳绳子而逃离。换句话说，只是在某一箩筐的重量超过另一个箩筐的重量时，滑车才能滑动。

对这一问题作一模拟，能够方便地找到最简单的解法。即把各人的重量写在分开的卡片上，并把这些卡片作前后搭配，你将无法在九次内使他们三人都滑到地面。其做法是：

1．王子滑下，石头上来；

2．公主滑下，王子上来；

3．石头滑下；

4．皇后滑下，石头与公主上来；

5．石头滑下；

6．王子滑下，石头上来；

7．石头滑下；

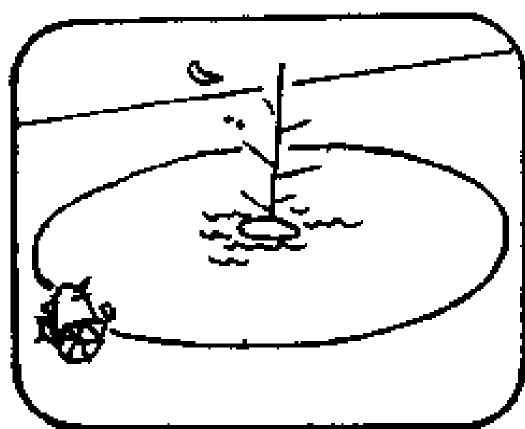
8．公主滑下，王子上来；

9．王子滑下，石头上来。

有时还可包括一些动物，设这些动物必须在人的帮助下才能爬进和爬出箩筐，从而使这类问题更难些。路易斯·卡罗尔根据上述问题又提出了如下同类问题。除了皇后、王子、公主和石头以外，城堡的最高一间房子里还有一头重24公斤的小猪、一条18公斤的狗和一只12公斤的猫。对两个箩筐之间的重量差的限制同上例规定的一样，不过现在在每一头必须都要有人，以帮助这些动物进、出箩筐。

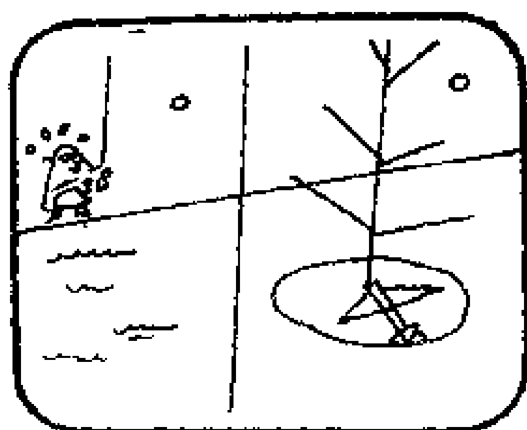
你能否找到少至12步的解法？要注意的是，上述这两个问题，从箩筐里走出的最后那个人，必须迅速地走开，否则箩筐和石头会碰在他（她）的头上！

飞机坠落于小岛

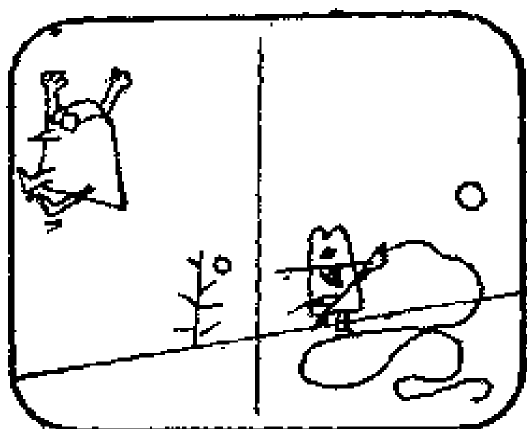


奥维尔把他的汽车停放在小湖畔。

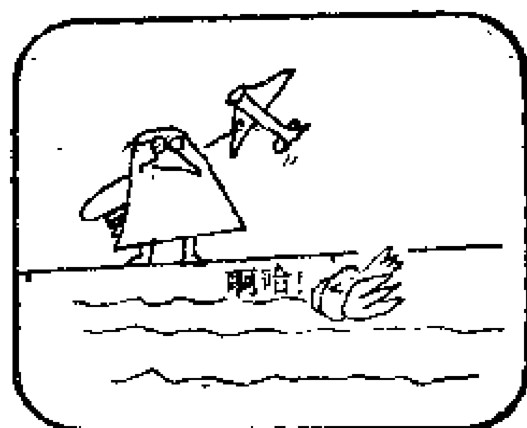
奥维尔：这真是一个开阔的好地方，适合我的无线电操纵的模型飞机飞行。除了湖心小岛上有一个大树外，这里再没有别的树木或岩石了。



奥维尔想操纵他的飞机绕这棵大树飞行，但因判错了距离，飞机撞树而坠地。



奥维尔十分懊恼，他想取回这架贵重的飞机，但湖水很深，他又不会游泳。他的汽车里有一根绳子，绳子要比湖面的最宽部位长出几米，但他却不知道如何利用这根绳子。



突然他闪过了一个念头。

奥维尔：唉，没有别的办法。虽然我身上会弄湿，但我马上就可把飞机取回来。奥维尔想出了什么办法？

思索代替游泳

奥维尔是用下面这样的机灵方法取回模型飞机的：他把绳子的一端缚在汽车的前车挡上，而汽车停放在紧靠湖边的地方。他手握绳子的自由端，围绕小岛中央那棵树走一圈，然后拉紧绳子，把它的自由端也缚在车挡上，这样在汽车与树之间构成了牢固的双股绳索。尽管奥维尔不会游泳，但可以用手拉住这双股

绳索渡水，方便地在湖边与小岛之间往返。

另一个有名的老题目也是讲如何利用手边上的材料来完成从岸边走到小岛上去的任务，该题中的“小岛”位于图 8 那样正方形湖的中心，一个人想从湖边走到小岛上去。同前者一样，他不会游泳。湖边有两块同样的跳板，但每块跳板的长度要从湖边搭到岛上是略短了一些。他将如何利用这两块跳板走到小岛上去呢？

图 9 出示了答案。

推而广之，假定有两块以上同样的跳板，板的长度比上例的板还要短，能否用这些板搭成一座通往小岛的桥？

象图 10 那种用三块跳板搭成的桥，或许你是不难想象的，但不见得会有很多人知道，如何用五块或者八块长度更短的跳板仍能跨过湖面。

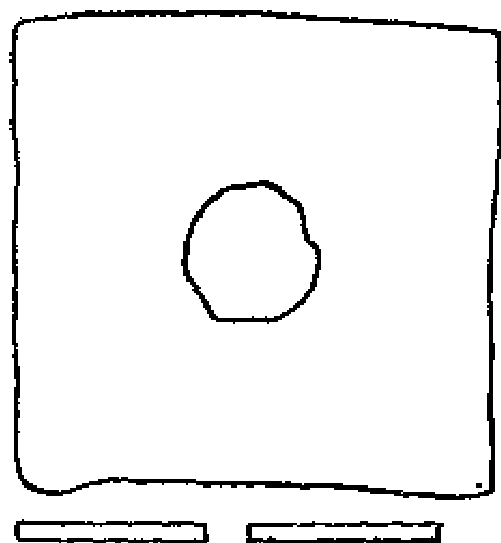


图 8

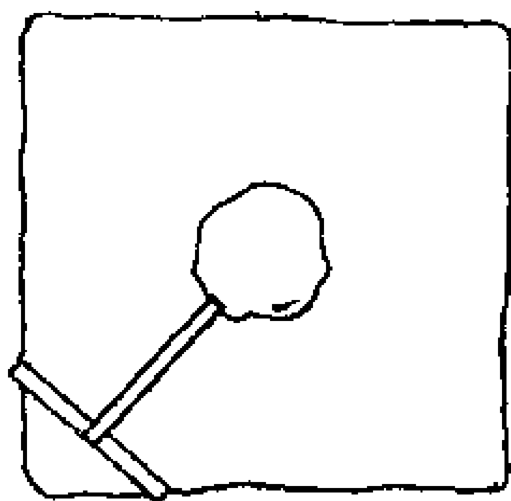


图 9

我们可以把这种问题理想化：让小岛成为一个点，让跳板成为直线段，允许这些跳板只要相互接触就算“重迭”了。请想象一下推广到有无穷多的相同跳板时的情形。极限情况如图 12 所示。假如正方形湖的边长为 2，如果跳板数量有无数块，那么每块跳板可能的最短长度为 $\sqrt{2}/2$。运用勾股定理可以证明这

一点。

有兴趣的话，你可以研究一下在边界不是正方形的"湖"时类似的理想化的跳板问题，诸如边界是圆和正多边形。

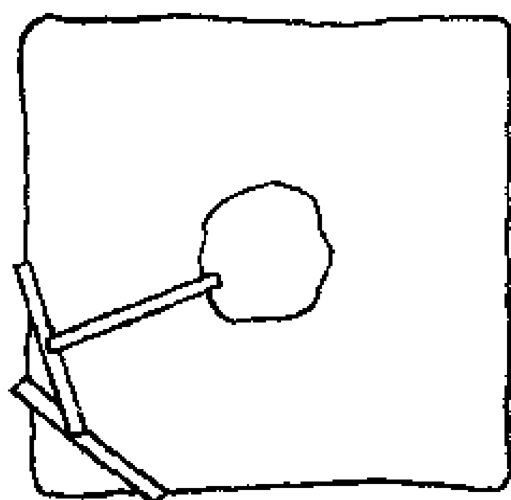


图 10

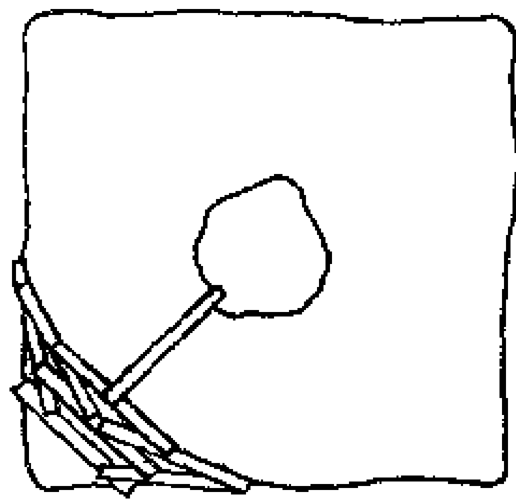


图 11

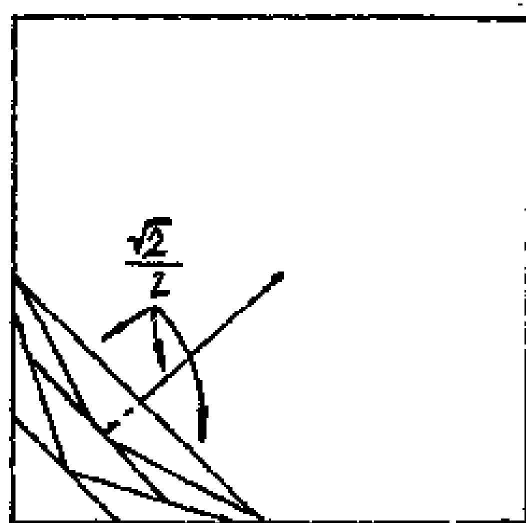
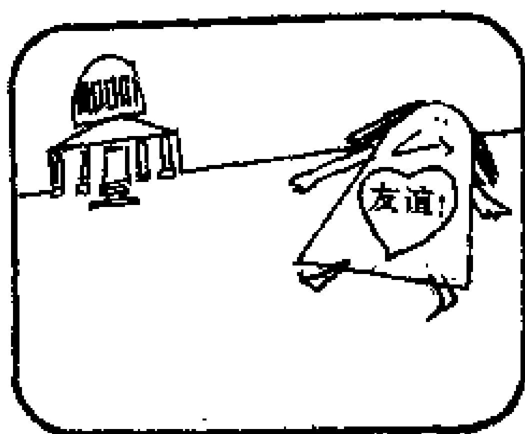
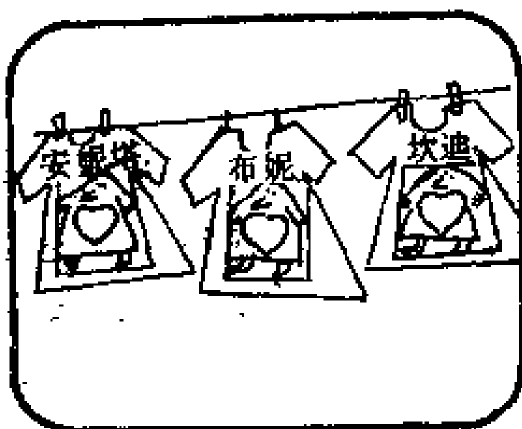


图 12

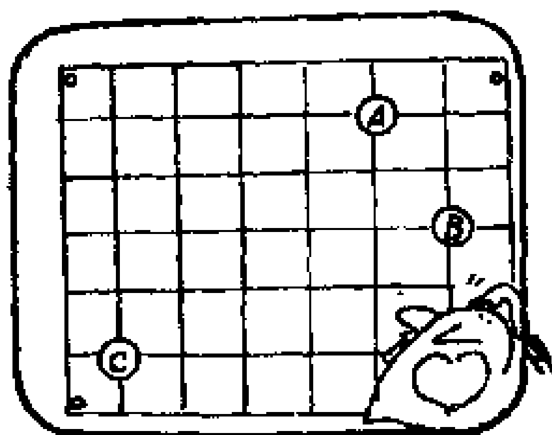
懒惰的朋友



杰妮自以为是世界上最重友谊的人，她打算在华盛顿租一间房子。

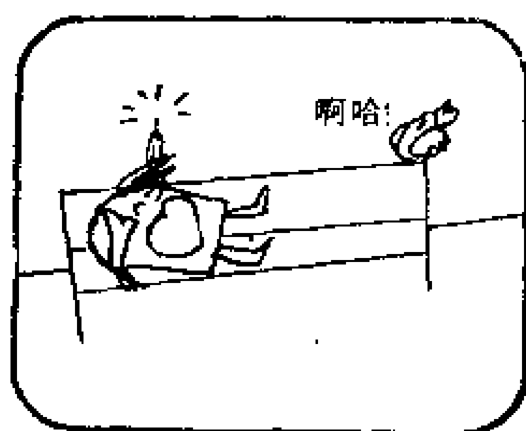


杰妮有三个女友，她们都住在市里，她想居住在尽量靠近这三位女友的地点，以便增进友谊交往。



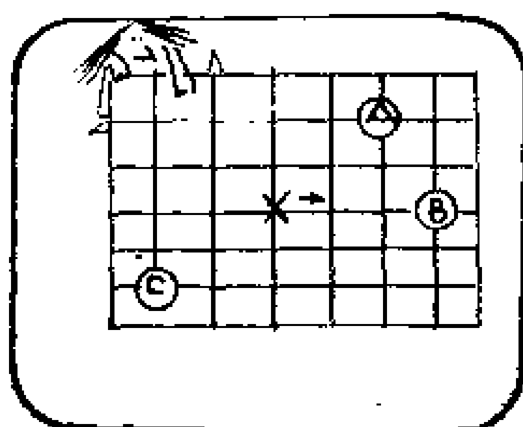
杰妮在市区地图上把这三位女友居住的路口都标上了记号。

杰妮：让我来想想，一定要选择好居住地点，使它离每个姑娘住处的距离之和尽可能最短。

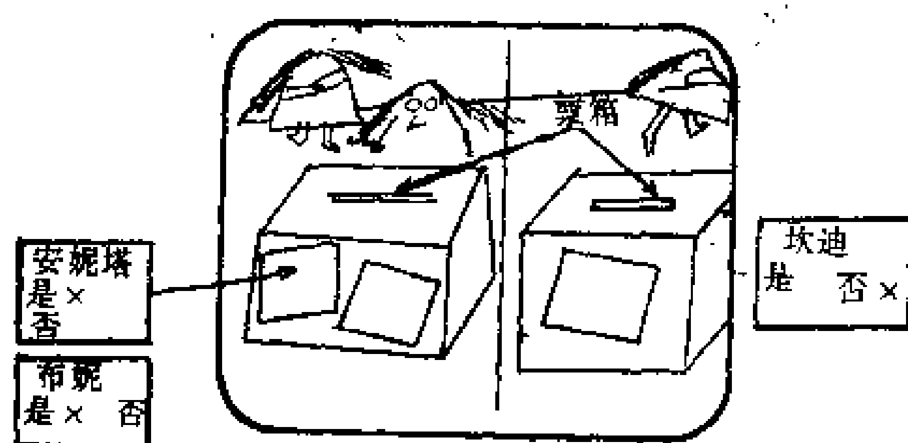


杰妮试了又试，正想作罢的时候，忽然她叫了起来。

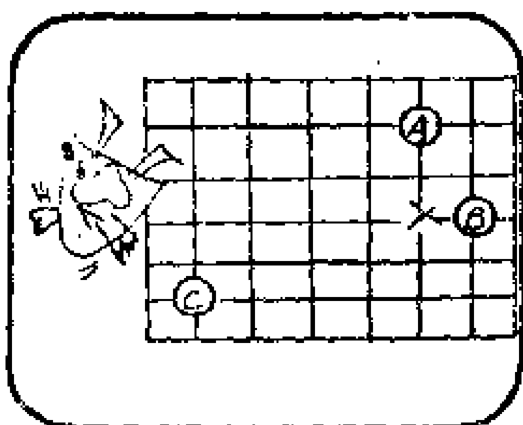
杰妮：啊哈！我找到一个简单办法来确定我要住的地方。



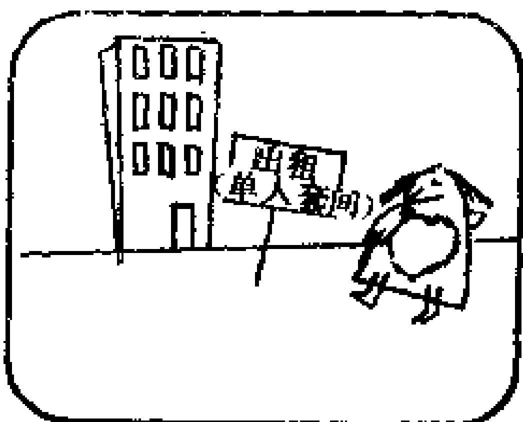
杰妮想出的聪明办法是自己问一下自己，假如她从一处迁移到另一处，女友们是否会赞成。她从看上去比较合理的某一地点开始，然后考虑往东移一条马路。



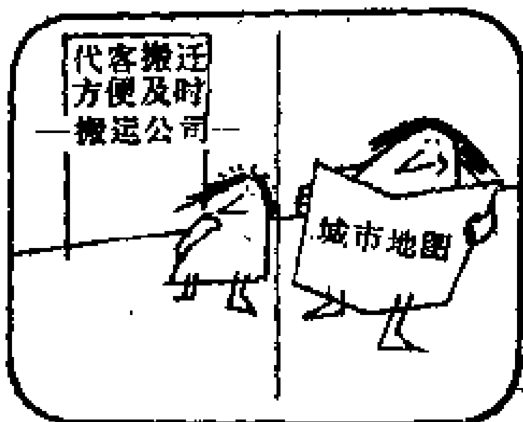
杰妮：安妮塔和布妮投票"赞成"这样移动，因为我更靠近她们了。坎迪将投票"反对"。但是我缩短的距离要比延长的距离合算得多，因此我将采纳多数人的意见。



每当多数人表示"赞成"，杰妮就移动一步。而当多数表示"反对"的时候，她就尝试另一迁移方案。最后她移到某一路口处后，如再朝任一方向移动都遭到了多数反对，这就是她决定要住的地方。



杰妮幸运地在那个地点租到一间房子。一星期以后，布妮搬远了七条马路。



杰妮：真是个淘气精！现在我必须搬到一个新的位置了。但当杰妮查看地图时，惊奇地发现她仍然可以留在原地居住。你能否解释一下这倒底是怎么一回事？

表决算法

假如布妮朝正东搬离七条马路，她的新居对杰妮的居住位置并无影响。实际上她可以朝东随便搬离多长距离，而杰妮住的公寓将继续在可供选择的居点之内。

假定你在更大的格子上试验，而格子上打标记的地方不止三个，就可以更好地体现了表决算法的效能。你会发现这种步序能迅速地定出 x 的位置，使 x 到所有各点的距离之和最小，但

这些点数必须是奇数。当点数为偶数时，为什么不行呢？回答是，假如点数为偶数，表决就有可能不分胜负。表决一旦不分胜负，下面的步序也就无法进行了。

你可能会乐意研究下面的一些有关的问题：

1．当点数为偶数时，能否想出一种适用的方法？

2．在何种条件下一个点或几个点的移动不会影响 x 的位置？

3．假如考虑到街道的宽度，表决方法是否有影响？

4．假如这些点（包括 x）不限定位于街道交叉处，是否有影响？

5．假如格子是由平面上任何方向的直线街道组成的，则表决方法是否可行？

6．假如街道弯弯曲曲，则表决方法还可行否？

虽然表决方法适用于任何一类网络，但在无标记的平面上并不适用，因为行程不再只局限于某几条道路了。但问题一般都是属于这种情况。给定平面上的 n 个点，找出点 x，使其到所有各点的直线距离之和越小越好。举例讲，设有三个城市 A、B 和 C，要使飞机到三个城市的距离之和为最小，那么机场应设在哪儿？这显然与使汽车到这些城市的距离之和必须最小的问题不相同。也就是说，机场的理想位置可以不同于公共汽车站的理想位置。

答案是，机场的位置应该使从机场到这三个城市的三条航线呈三个 $120°$ 角，然而这个答案难以用几何方法证明。在四座城市情况下，假如它们是凸四边形的几个顶点，机场应设在两条对角线的交叉点上。这一点不难证明。对于在平面上任意个给定的点，以确定 x 位置的一般性问题，就更难解决。

你能否设计一种简单的机械装置（模拟计算机），能够快速地对平面上任何三点定出 x 的位置？假如用桌面代表该平面，在

桌面上对这三点中每一点钻一孔，把三根细绳的末端缚在一起，让三个自由末端穿过这些孔，一线穿过一个孔，每端吊一同样质量的重物。细绳上的同等力对应于这三个点居民的三张同样的“表决票”。桌面上由结头定出的位置表示点 x。当然，这是可行的，因为问题的数学结构和物理模型的结构之间存在同构关系。

现在我们使原来的问题变得再复杂一点。假如点 A、B、C 不是各住一位姑娘，而令这些点代表学生们居住的大楼，A 点有 20 名学生，B 点有 30 名学生，C 点有 40 名学生，他们都上同一所学校，为使所有 90 名学生步行距离之和减至最小，这所学校应该设在哪儿？

假如他们步行的范围只限于城市街道，我们就可以采用上面那样的表决方法，每个学生投一票，马上能够找到校址应设在哪儿。然而，假如这三幢大楼位于同一个平面，而学生们可以沿直线步行到学校（譬如农村里的学生可以穿过开阔的田野），我们能否改变一下模拟计算机使它象上面那样起作用呢？

可以的，我们可以用不相等的重物代替相等的重物，使重物的质量正比例于每幢大楼里的学生人数，假设这些细绳取一个位置，而结头便定出学校的位置。假如某幢大楼的学生人数超过另外两幢大楼的学生人数之和，这时能否用计算机算出？譬如说，A 点有 20 名学生，B 点有 30 名学生，而 C 点有 100 名学生。这时它也同样能很好地计算。相当于 100 名学生的重物将把这些细绳的结一直拉到 C 孔的顶部，这就正确地表明这所学校的校址应设在 C 点。

多于三个点时，模拟计算机能否计算？能，这可以推广到 n 个点，即使这些点不是凸多边形的顶点也可以。但是由于摩擦的关系，多于三点的话，系统就不能有效地工作。

直线图论是正在迅速发展当中的一个数学分支。它研究的

是由线段连接的顶点(点)。在寻找最短路径方面,图论有好多重要的应用。有的问题已获解决,有的还没有解决,在已经解决的许多有名的问题当中,有一个问题如下所述。

给定平面上的 n 个点,要将它们用直线相互联接起来,而整个网络的总长要尽可能短。不允许在该平面内增设新的顶点,这种网络就称为"最小生成树"。你能不能想出一种寻找这类网络的算法?

克鲁斯科尔算法(按以约瑟夫·B·克鲁斯科尔的名字命名,他第一个想出这种算法)是这样找最小网络的:

确定每一对点之间的距离,将这些距离依长度的增大方式作标记。最短的记作 1,次短的记作 2,以下依次类推。假如有两个距离相等,哪一个先定标记都一样。在间距为 1 的两点之间画一条直线,然后画距离为 2、3、4、5 等等的直线,但不能添线构成环路。假如画的直线构成了环路,就不必考虑这一对点,而处理下一个较长的距离。最后的结果,便是一棵连接着所有各点的最小生成树。

这种生成树有一些重要的特点,例如直线只能在点上相交,而且相交于任意一点的直线不会超过五条。

最小生成树不一定连接 n 个点的最短网络。必须切记:我们把这种网络限定成不可能有附加的顶点。假如允许新添附加顶点的话,那么该网络就可能会更短了。可以用单位正方形的四只角来简单地加以说明。最小生成树由正方形的任意三边组成(图 13a)。假定我们允许新添顶点,那么有没有连接这四只角顶而连线总长度小于 3 的网络呢?

大多数人认为最小网络是由该正方形的两条对角线组成的(图 13b),但事实并非如此。图 13c 示出了正确的解法。该正方形的两对角线的总长为 $2\sqrt{2}=2.82^{+}$,而图 13c 网络总长更短,仅为 $1+\sqrt{3}=2.73^{+}$。

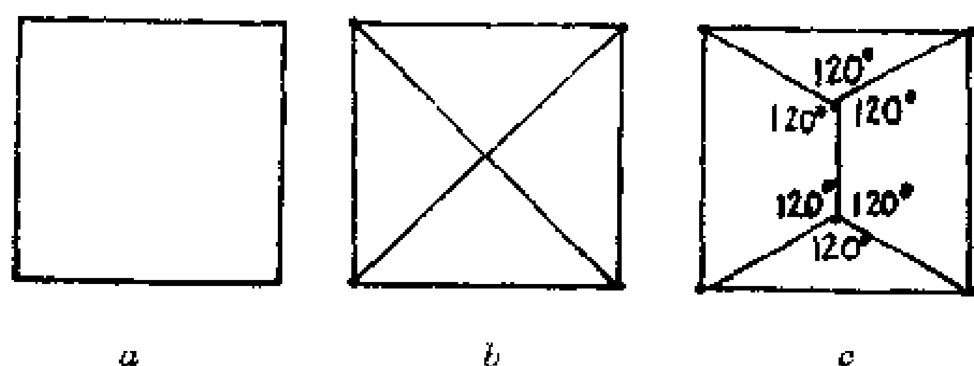
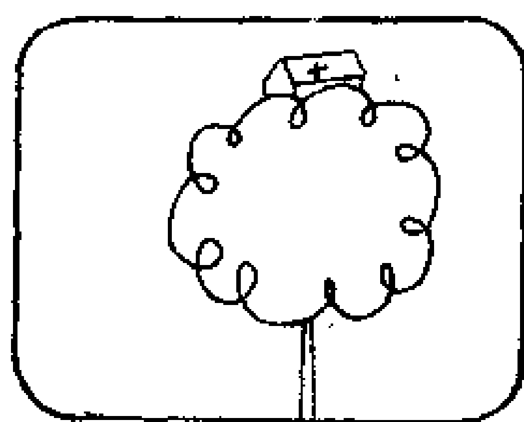


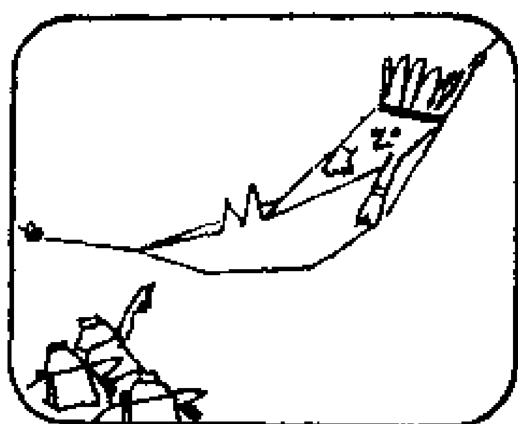
图 13

当允许新添顶点时，寻找连接平面上 n 点的最短长度网络的一般问题，就是众所周知的斯坦纳问题。这个问题在一些特例中已经解决，但在寻找连接平面上 n 点的最小斯坦纳树的“斯坦纳点”（新添顶点）方面，还没有找到一个有效的算法。这个问题应用于许多工程上，例如从设计电子计算器所使用的微处理机芯片，直到寻找铁路线、航空线、电话线路和其它航运与通信线路的最小网络等。

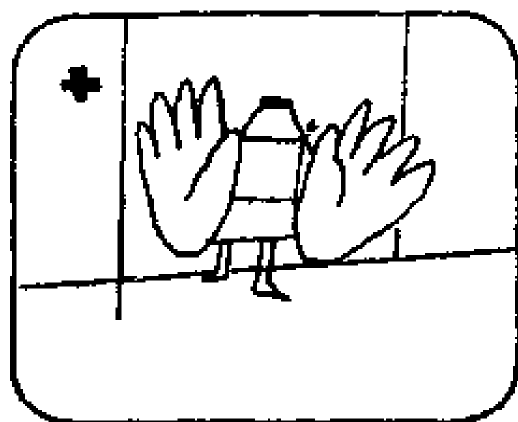
外科医生



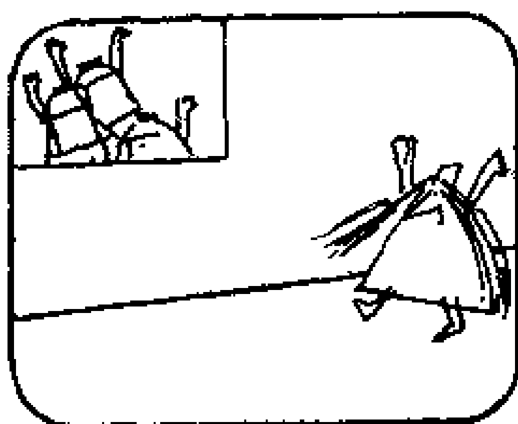
在热带丛林深处的一家医院里有三名外科医生——琼斯、史密斯和罗比森。



当地的部落首领被怀疑患有一种极易传染的古怪疾病，责令这三名外科医生每人必须为他动一次手术。麻烦的是，这三名外科医生随便那一位在检查这个首领时都可能感染上这种怪病。

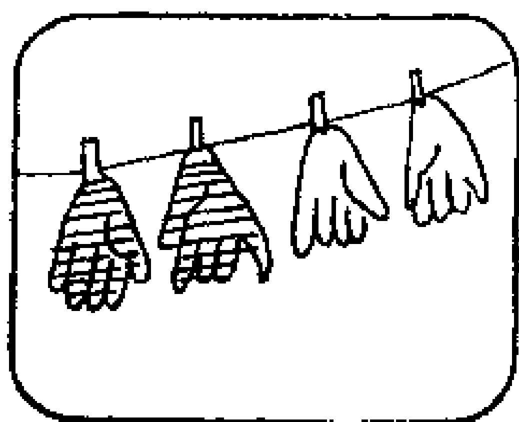


动手术时，每一名医生都必须戴上橡皮手套。假使他传染上这种怪病，病菌将会感染到同他的手接触的任何手套的一面，而如果首领患上了这种疾病，就将感染到所戴手套的外面。

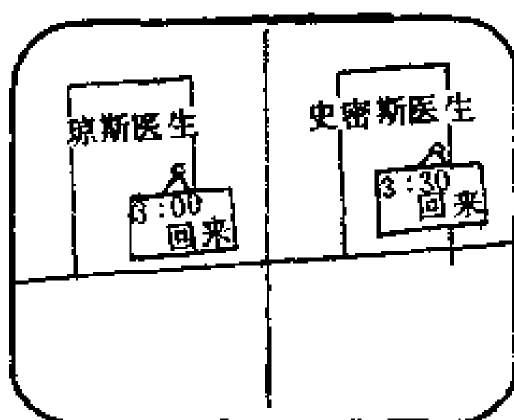


就要开始动手术时，护士克利妮小姐跑进手术室。

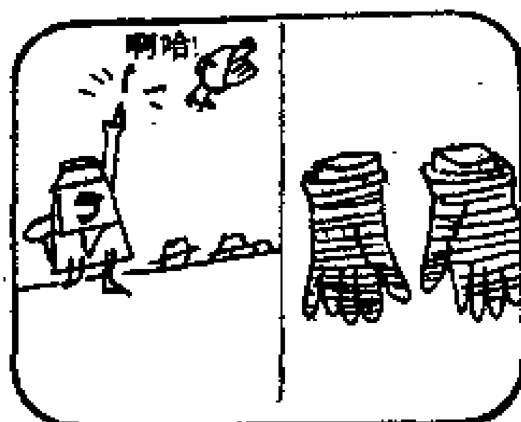
护士克利妮：诸位医生，我给你们带来了不幸的消息。



护士克利妮：我们只有两副消毒的手套，一副为蓝色，另一副为白色。

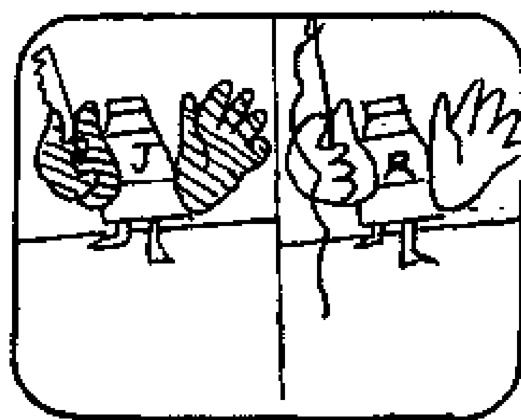


琼斯医生：只有两副？假如我先施行手术，我的手套两面都可能弄脏的。假如史密斯接下去动手术，他的手套两面也可能弄脏。这样一来，罗比森就拿不到无菌手套了。



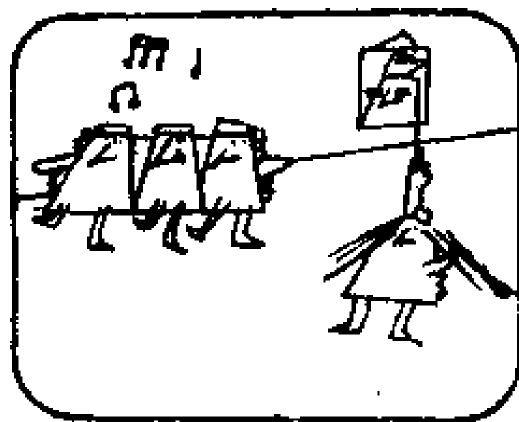
突然，史密斯医生提了个建议。

史密斯医生：假如我戴两副手套，蓝手套戴在白手套的外面，每副手套有一面可能沾污了，但是每副手套的另一面仍然是无菌的。

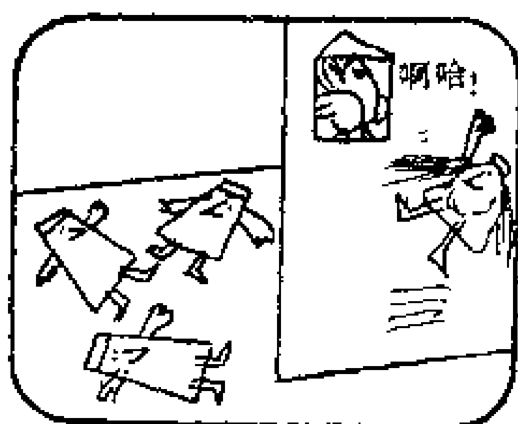


琼斯立即明白了。

琼斯医生：我知道了。我可以戴蓝手套，无菌的一面在里，而罗比森可以把白手套翻过来戴，也是无菌的一面在里。这样我们就不会有从首领那儿感染疾病或者相互感染的危险了。

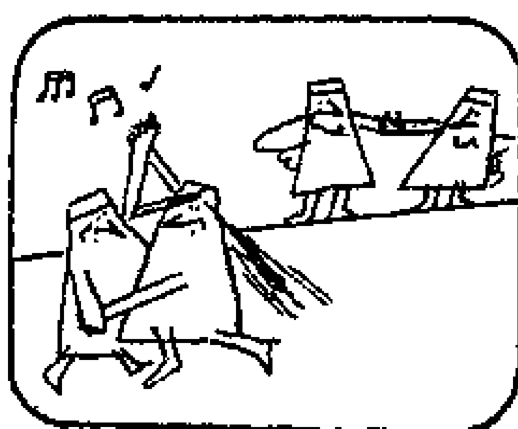


护士克利妮：这对你们医生是没有问题了，但首领将会怎样呢？假如你们当中任何人感染了，而首领没有感染，他会从你们之中某个人那儿得病的。



一经提醒，外科医生们被问住了，他们该怎么办呢？过了一会儿，克利妮小姐喊了起来。

护士克利妮：我知道你们三个人应该怎样才能既施行手术，又不会让你们或者首领去冒感染疾病的风险。



医生们没有一个能想出克利妮小姐是怎么想的，但当她作了解释以后，他们都同意这办法是可行的。你能想出这个办法吗？

里面和外面

在解释克利妮小姐想出的聪明办法之前，让我们首先弄懂只能保护外科医生们的那个办法。

我们用 $W1$ 代表一副白手套的里面，$W2$ 代表其外面；$B1$ 代表蓝手套的里面，$B2$ 代表其外面。

史密斯医生把这两副手套都戴上，先戴白手套，后戴蓝手套。$W1$ 一面可以被他弄脏，而 $B2$ 一面可以被首领弄脏。史密斯做完手术以后，把两副手套都脱下。接着，琼斯医生戴上蓝手套，无菌面 $B1$ 同他的手相接触；罗比森医生则把白手套的里面一边翻出，然后戴上，使无菌面 $W2$ 同他的手相接触。

现在来介绍一下克利妮小姐的办法。

史密斯医生同前面一样戴上两副手套，$W1$ 和 $B2$ 面可以被弄脏，但 $W2$ 和 $B1$ 面仍保持无菌。

琼斯医生戴上蓝手套，使 $B1$ 面对着他的手。

罗比森医生把白手套的里面一边翻出，把手套戴上，使 $W2$ 面对着他的手。然后他再戴上蓝手套，把它套在白手套的外面，使 $B2$ 面在外面。

在所有这三种情形中，只有 $B2$ 面接触着首领，所以他不会有从任何一位外科医生那儿感染疾病的危险。

就我们所知，这个问题至今仍无完全推广。给定 n 名外科医生必须对 k 名病人施行手术，要保证他们以及病人相互都不冒感染疾病的危险，那么最少要用几副手套？

第六章　文字游戏

数学家们往往酷爱文字游戏，也喜欢用文字游戏互相玩笑，这是完全可以理解的。众所周知，词只不过是字母按一定次序加以组合而已，正如句子是根据句法将一串词连在一起一样。因此，语言带有很浓的组合数学的味道，与组合数论颇为相似。文字方阵与数字幻方雷同。句中所用的标点符号相当于用来“标点”代数的句子的数学符号（例如括号、加号和减号等等）。

本章将仔细研究上述各种有趣的相似性。回文——正读和反读都一样的句子——与回数相雷同。我们将会看到，数论方面颇有名的一种“回数猜想”仍未获得解决。同时，还有不少关于回数素数及平方、立方回数的有趣定理。本章介绍的其它一些难题，包括将一些词拆成几个部分，其方法为使用与在分割论（这是数论的一个分支）中把数分成几个部分极为相象的方式。

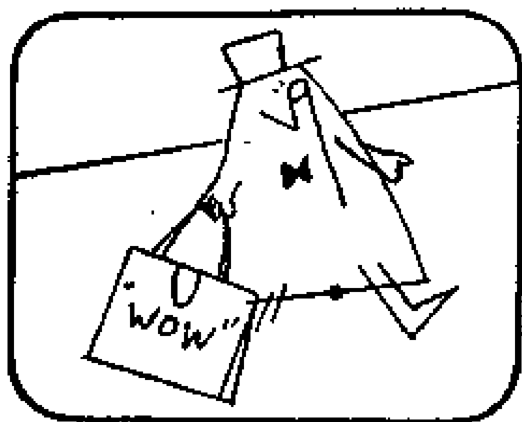
假如我们把字母看作几何图形，好多异乎寻常的难题就出现了。我们将看到这类问题中有些涉及到两种重要的对称：180度旋转对称（有时叫做“双重对称”）和镜面反射对称。我们将发现，有些单词，甚至有些完整的句子可以颠倒过来而不改变它们的结构形式。在旋转180度时，每位数字相似于某一字母，这一事实形成了一类趣味题目的基础，鉴于袖珍计算器已经普及化，这个问题也就相当流行。

我们不能把这些字母看作在旋转和反射时形状保持不变的刚性图形，而应看作为拓扑图形，它如橡皮筋那样扭曲变形。这也导出了一些有趣问题。这里披露了一些问题，将使你对拓扑结构有个基本的了解。

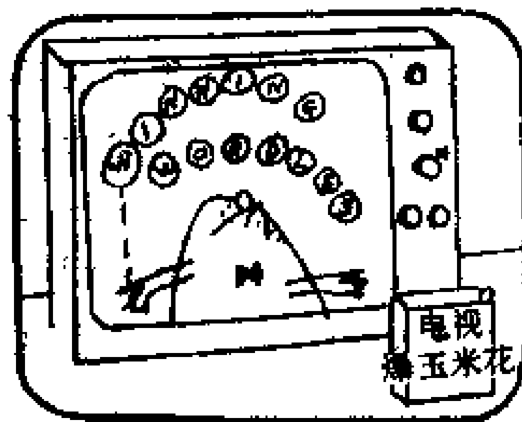
最后，我们将考虑到文字问题，这些问题将引出某些重要的数理逻辑概念。关于“不在里面”的反面的普通谜语，与逻辑中的否定法则有着密切的关系，与代数中的负号处理也有密切的关系 只有你领会到若不用高级语言（逻辑学家把它称为“元语言”*）表达，则无法探讨某种语言的词和句子，这时许多滑稽谜语才看得明白。

我们希望本书的最后一章写得最生动有趣。读者也许会感到奇怪，为什么要在趣味数学书里写上文字游戏这一章？对此我们早已回答了，这不仅仅因为数学家喜好文字游戏，或者说因为文字游戏有其组合的特性，更主要的是因为即使文字难题也能导出意想不到的重要的数学概念。

W·O·沃德尔博士



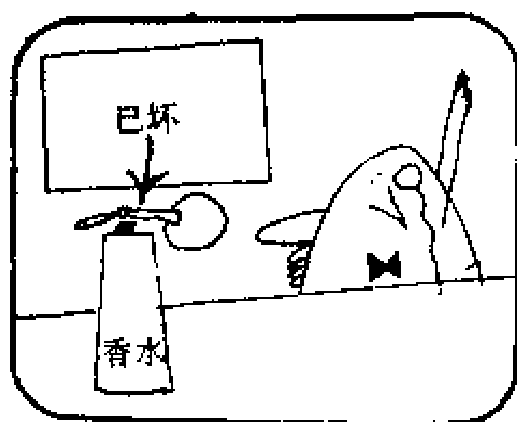
沃利·O·沃德尔博士是位著名的数学家。



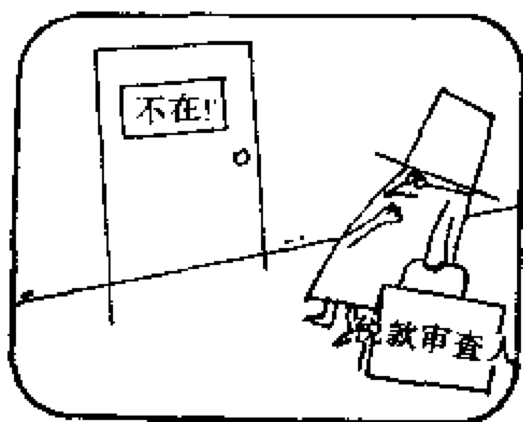
沃德尔博士是“沃德尔获奖游戏”的主持者，这是一种由他发起的、极为流行的电视游戏节目。如观众能解出沃德尔博士提出的巧妙文字难题时，便可赢得一笔巨额奖金。

---

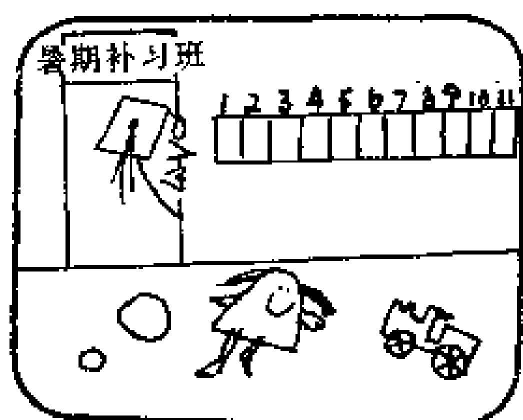
* 用以描述另一语言的语法或语义的语言称为“元语言”——译注



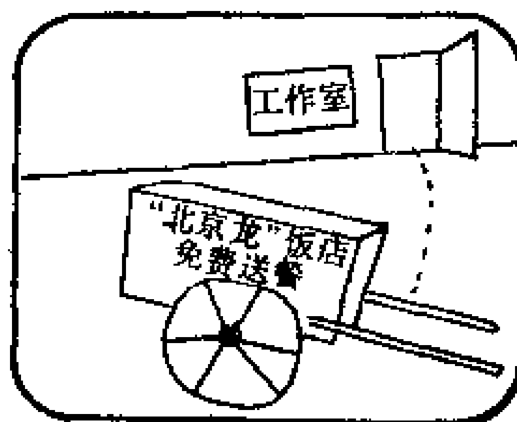
沃德尔博士：文字游戏就象数学那样，但符号为字母和单词。同时，拼音规则和语法告诉了我们哪些特定的组合是可以允许的。



沃德尔博士：我给你们举两个例子看看。第一例子是，“不在里面”的反面是什么？



沃德尔博士：哪一个由11个字母组成的词连所有耶鲁大学毕业生都会拼错(spell it incorrectly)？



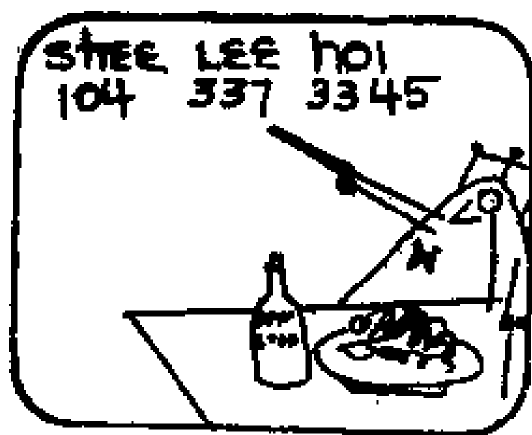
沃德尔博士：你能答上这两个问题吗？“不在里面”的反面是“在里面”，全体耶鲁大学毕业生都会拼“错”的字是“incorrectly”在今天的精采节目里，有许多这样的问题，让我们来试试看。

否定之否定

在思索“不在里面”的反面时，很容易想到“在外面”，但是，该反面当然是“不是不在里面”，这同“在里面”完全一样。否定之否定为肯定，这在语法正确的英语和在乘法及形式逻辑中都是成立的。其实，你有时会遇到一连串多达三个或三个以上的否定。法则是这样的，任何偶数个的否定为肯定，而任何奇数个的否定仍为否定。例如，有一次哲学家艾·诺思·怀特赫德在向一位讲演者表示感谢时说：“使他的问题的模糊之处不再模糊了”。

顺便解释一下，“错误地”一词的谜语出人无备，是因为人们已习惯地把这一词理解为副词，用以修饰动词——“拼读”，而不是把它当作这个词的本身。

西·李·霍



沃德尔一看到霍先生的电话号码后，便请他来作客。你能否发现西·李·霍与他的电话号码之间有什么特殊的联系吗？



把霍先生的名字颠倒过来看，就变成他的电话号码了。

104 337 3345

如果把每个电子显示数字颠倒过来看，可以把它当作一个字母来看待。这些均以近年已经普遍应用的袖珍计算器作许多特技表演的基础。

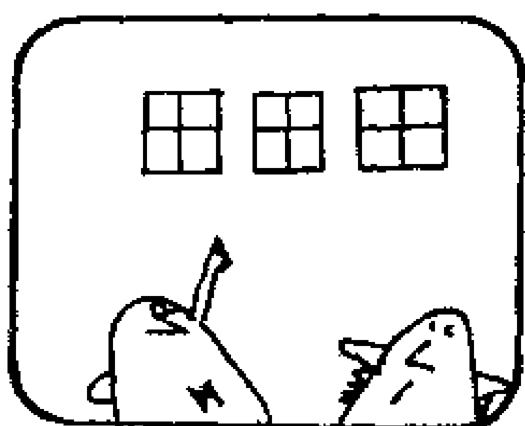
第一个这类特技表演——此种表演显然引起了这种游戏热——有着一条关于阿拉伯和以色列战争的故事线索。下面这个说法是位著名的计算机科学家唐纳德·E·克努特设想出来的：337 个阿拉伯人和 337 个以色列人在一块 8,424 米见方的土地上进行格斗，哪一方是胜者？要找出答案，我们把 337 的平方与 8424 的平方相加，得出其和为 71077345，当把它颠倒过来看的话，就成了“SHELL OIL”，即“壳牌石油”。

关于在计算器的显示器上的数字颠倒过来看时能变成文字的内容，已有整本整本的书出版。下表示出了把每一位数颠倒看时都象一个字母：

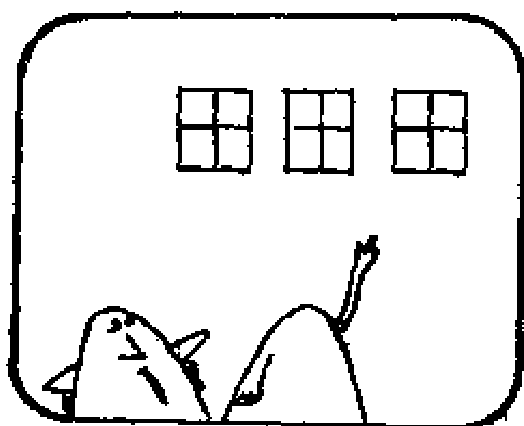
0	O	5	S
1	I	6	g
2	Z	7	L
3	E	8	B
4	h	9	b

借助于上表将会发现，你自己也不难编造一些有趣的计算器问题，而把最后答案在计算器倒放时，可以作为一个适当的字来读。还可用小数点将两个字加以分开。

无从捉摸的“八”(EIGHT)

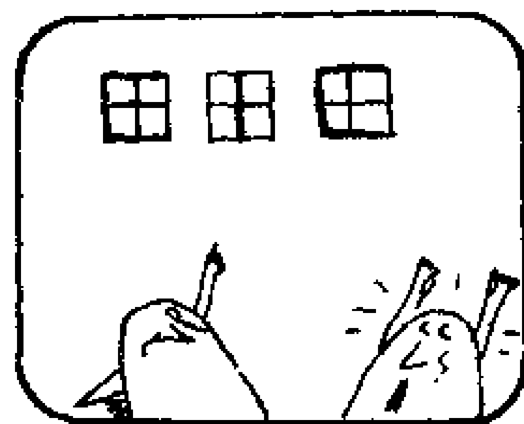


沃德尔博士：霍先生，我们的第一个问题使用了这18根筷子。奖5元钱，你能否只拿掉8根筷子而留下“8”！

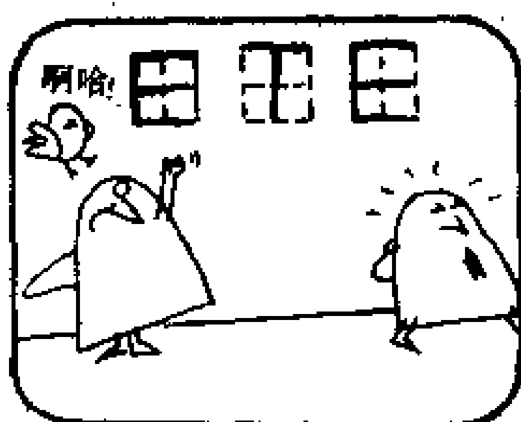


霍先生：孔子学说认为：不可解之即弃之。

沃德尔博士：先不要弃之，霍先生。请记住，这是个文字游戏节目。“八”(EIGHT)是一个可以拼出来的词。



霍先生：我也想过，但是“八”的字母太多了，没法把它拼出来。

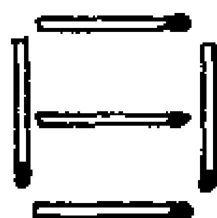


沃德尔博士：时间到了。你想不到“八”(EIGHT)可以用刑的方法拼写，实在太糟糕了。

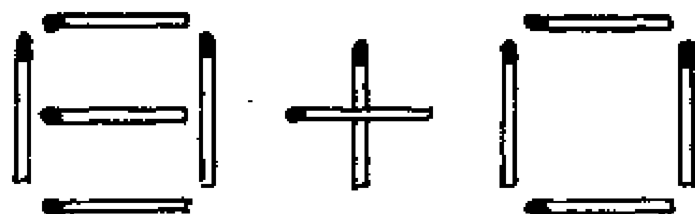
算术双关语

解决筷子难题要求掌握这样一个诀窍，即沃德尔教授念数词“eight”(8)时，其发音也可以当作“ate”(吃)这个字。

下面是这种难题的变相实例，要求找出各种窍门！筷子(或火柴)的排列象前面那样，但是现在的任务是取走13根筷子面留下8。解决办法是按下图那样留下数字8：



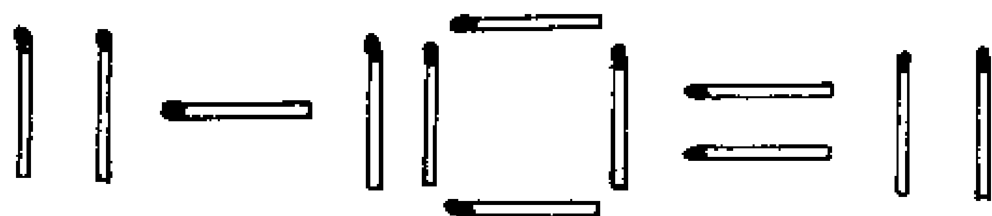
假如你的朋友觉得上面两道题目太简单了，那么可用下面这道较难的题目试试。图案仍然与前相同，取走7根筷子而留下8。此时的解法要构成一个等于“8”的表达式：



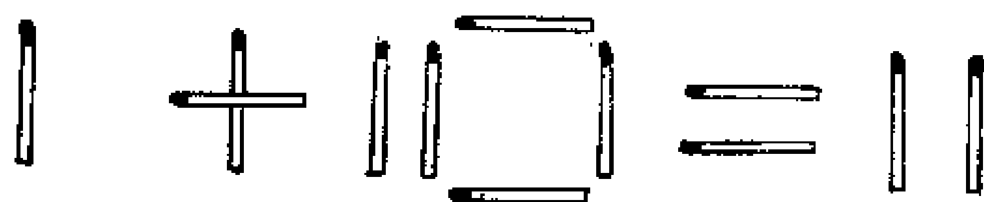
采用象筷子、火柴、牙签、咖啡搅拌棒、苏打小麦稽、铅笔或者其它最易于得到的短棒，可以编排出无穷无尽的趣味难题。下

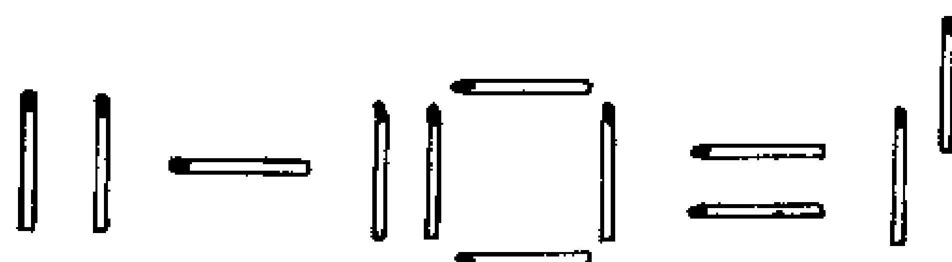
面还有两道题目，不妨给你的朋友们试试：

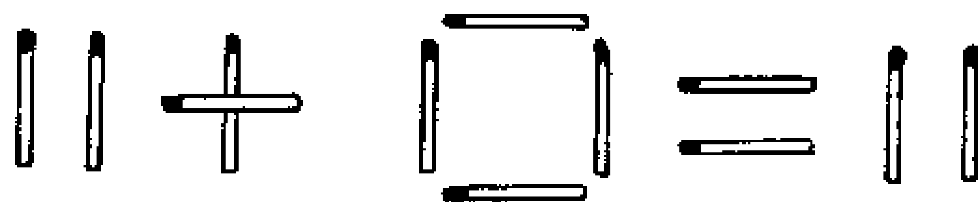
把 12 根短棒排成这样：

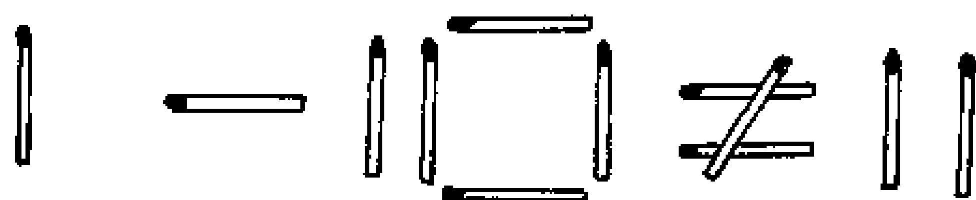


要求移动一根短棒而能变成一个正确的等式。下面是许多不同解法当中的四种解法：

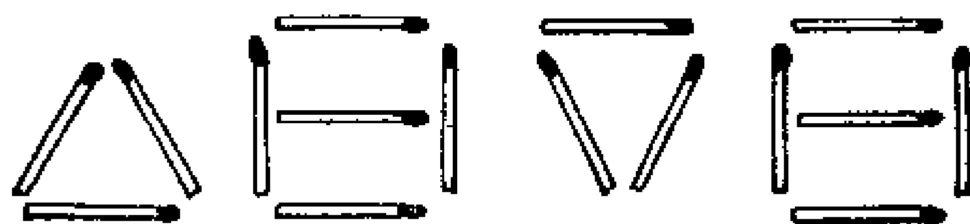




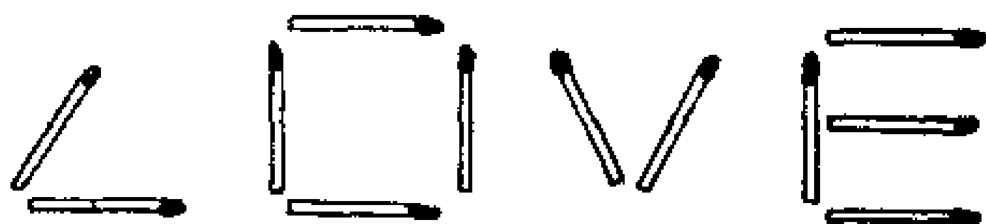




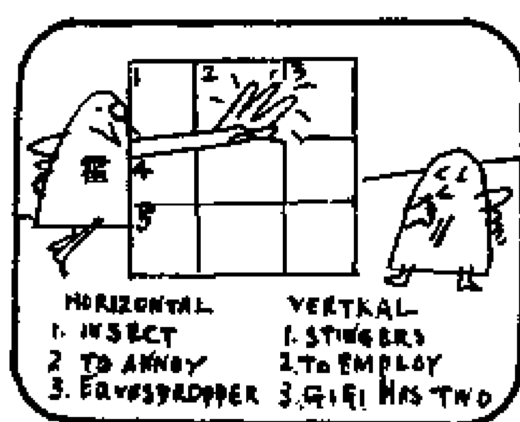
对于下面这些短棒：



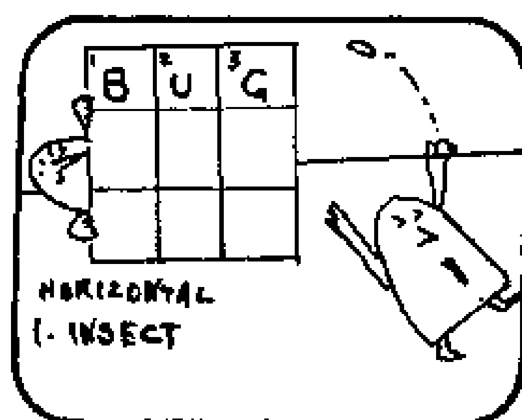
取走四根短棒拼成名词"match"，然后试问该词是由什么构成的。大多数人试用"WOOD"(木)这个词，然而在认识了"match"一词还含有"配婚"意思后才知道该文字游戏的答案如下：



世界上最小的纵横字谜

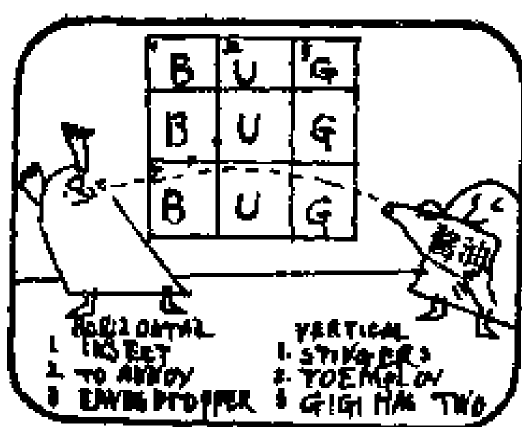


沃德尔博士：霍先生，现在有一机会可赢20元钱。一个很简单的纵横字谜，只有六条定义，限你三分钟内揭开谜底。

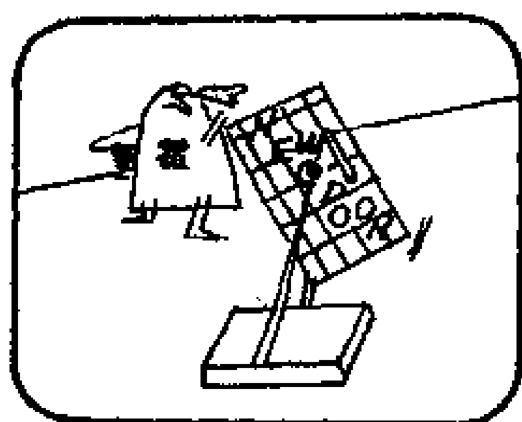


三分钟之后，霍先生只猜出了第一排字母。

霍先生：对不起！沃德尔博士，我想不出任何其它意思相合的字来了。



沃德尔博士：很遗憾，霍先生，你没有看到所有三个横排的字都是一样的。请记住，同一个词可以有不同的含义。



沃德尔博士：我们一面等待下一位客人，另一面有一个“看谁答得快”的问题供在家的电视观众回答。你能否把“NEW”与“DOOR”这两个字中的七个字母重新排列一下，变成一个词？

方阵与字谜

纵横字谜是关于截取符号序列的组合问题。现在计算机可以在它们的存贮器中贮存某一种自然语言的所有单词，可以编写出能有效地解答纵横字谜的计算机程序，也能编出各种编造纵横字谜的程序。

大多数纵横字谜均有“孔格”图案，即用来隔开每个单词的格子。一种古老而自然的纵横字谜根本没有孔格（例如我们这章的纵横字谜游戏），这就是所谓的“文字方阵”。以下面4级的文字方阵（四字母文字）为例：

K I N G
I D E A
N E X T
G A T E

这四个字（“KING”，“IDEA”，“NEXT”，“GATE”）可以横着读和竖着读。假如横读词与竖读词不同，就叫做“双字方阵”：

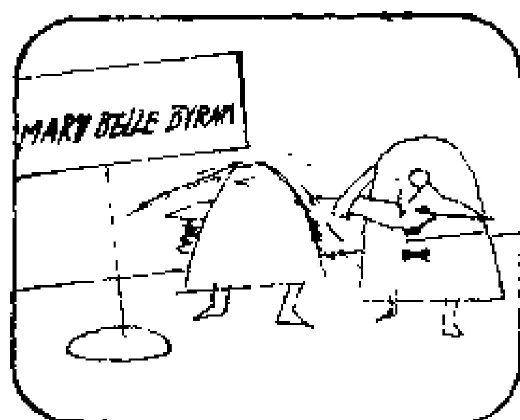
O R A L
M A R E
E V E N
N E A T

这两种方阵，若级数越高，就越难于构成。你可以试构一下四级的方阵，成功的话，再试五、六级的方阵。七级方阵极难构成。尽管文字游戏的行家们已经构成过八级、九级和十级的方阵，但几乎总要使用一些不常用的难字。

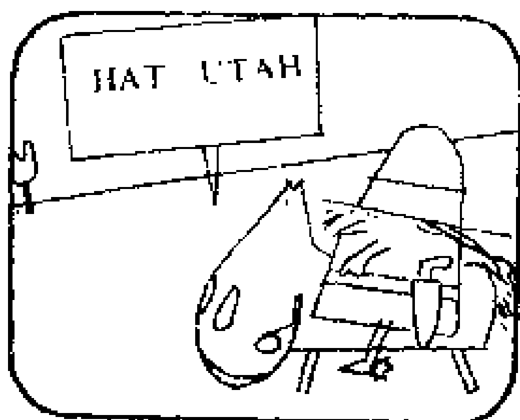
沃德尔博士的“NEW DOOR”难题属于“字谜”一类的难题，即把一个字、一个短语或句子的字母重新排列以后，就变成一个新的字、短语或句子（答案在书末）。有成千个有趣的字谜，其中字母重新排列后，构成的新词其意义以某种巧妙的方式与原来的词的含义有关：

Lawyers（律师）： Sly ware（滑头货）
Halitosis（口臭）： Lois has it!（洛伊斯有之！）
Punishment（刑罚）： Nine thumps（打九棍）
One hug（拥抱一次）： Enough?（够了吗？）
The eyes（眼睛）： They see（他们看见了）
The nudist colony（裸体主义者部落）：
No untidy clothes（无破旧衣服）

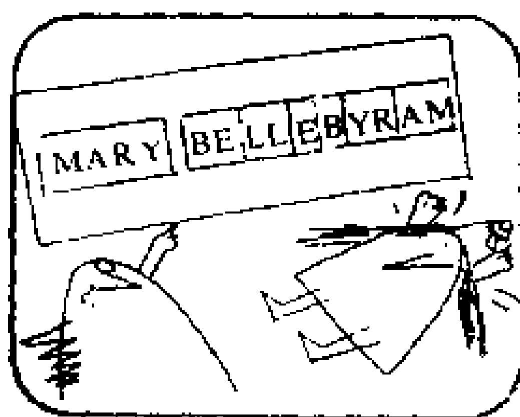
玛丽·贝尔·拜伦



沃德尔博士的下一个客人是玛丽·贝尔·拜伦，她的名字怎么这样古怪？



这块牌子上的字对我们也许有些帮助，这与玛丽·贝尔·拜伦的名字具有同样的特征。



“哈特·犹他”与“玛丽·贝尔·拜伦”都是回文，即字母的顺序是对称的，顺着念和倒着念完全一样。

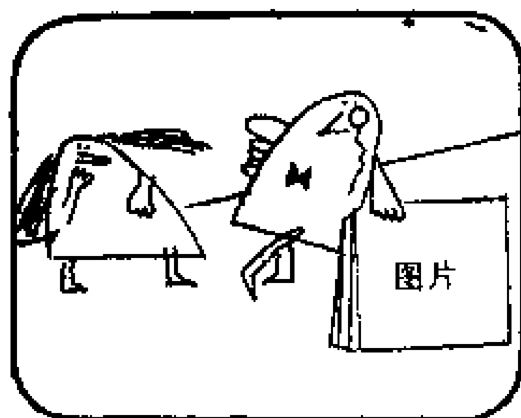
回 文 名 字

你能再拼写一些具有回文特性的人名来吗？这一点恐怕不象你想象的那么容易！下面是一些例子。

Leona Noel (利昂娜·诺埃尔)

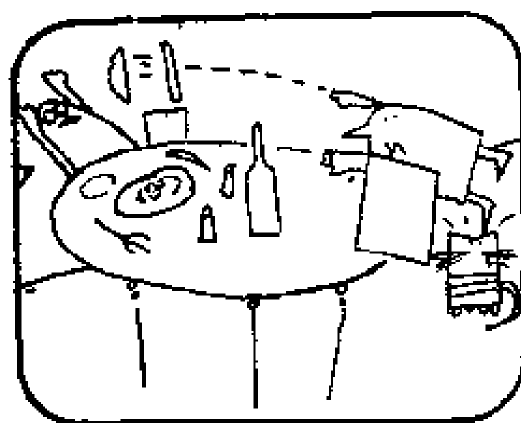
Nella Allen (内拉·艾伦)
Blake Dana de Kalb (布莱克·达纳·德卡尔伯)
Edna Lalande (埃德娜·莱伦德)
Duane Rollo Renaud (杜阿内·罗洛·雷纳德)
N. A. Gahagan (N. A. 盖哈根)
N. Y. Llewellyn (N. A. 卢埃林)
R. J. Drakard, Jr (R. J. 小德雷克德)

画　谜



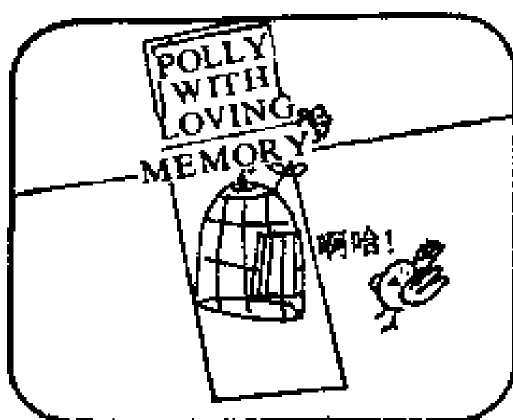
沃德尔博士：玛丽小姐，欢迎你参加这个节目。你提的第一个问题与这些画有关。每张画表示一个熟悉的数学术语。

玛丽：沃德尔博士，我不明白你说的是什么意思。



沃德尔博士：好吧，先举一个例子。这张画表示几何常数"π"。

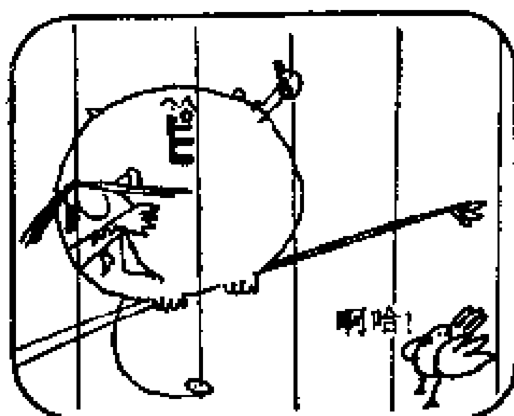
玛丽：噢，我明白了。我必须猜测画面表示的是什么。



沃德尔博士：对！现在请你猜其它的画面。

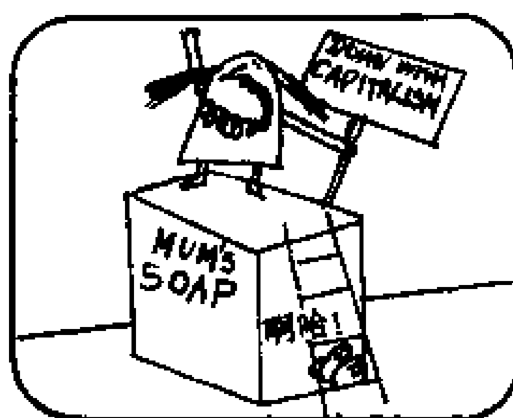
这是第一张。猜对一张可得奖 10 元。

玛丽：我猜着了，这是“鹦鹉跑了”(polly gone)，即“多边形”(polygon)。



沃德尔博士：对。第二张表示什么呢？

玛丽：唉！它的嘴唇象个“E”字，是不是椭圆(ellipse)？



沃德尔博士：确实是这样，玛丽。最后这一张你也一定能猜到，试试吧！

玛丽：噢，这张容易。这个“激进派”，是根号 (radical) 吧。

画　中　词

以某种隐含的方法表示词汇的画称为谜画。你也可以试着编出表示其它熟悉的数学术语的谜画。

与谜画差不多的一种形式是写一段文字，以某种办法描述一个字的意义。“数学”这个词就是以这种办法表示的数学方面的词和短语。图 1 可说明其基本概念。“数学”是老的谜画的翻新。

数学例子

TOPOLOGY

BIS ECT

GRAPH

SINEWAVE

DILATATION

LIMIT POINT

E^x PONENT

SUB SCRIPT

TRAN SLA TION

PE RI OD IC

ADD

MULTIPL Y

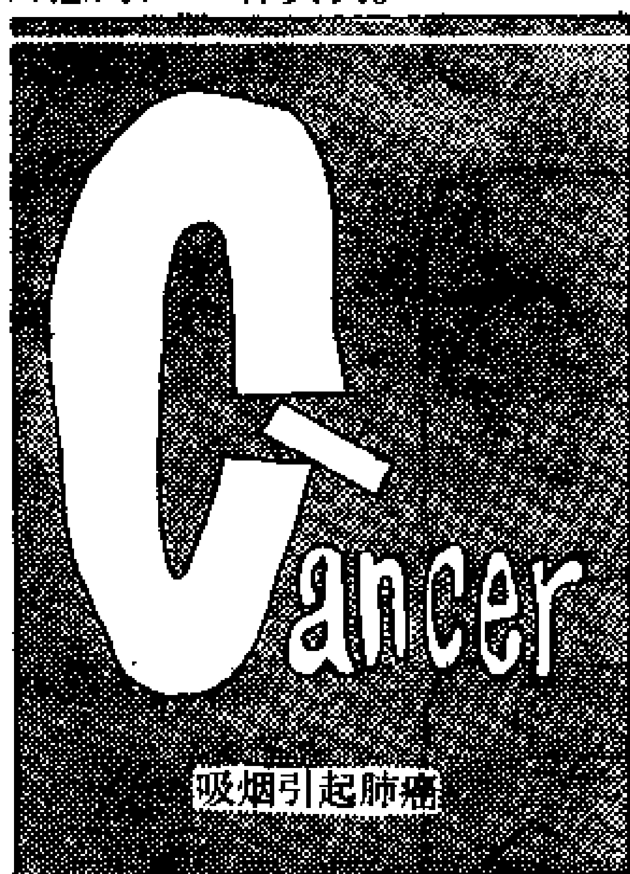
ROTATION

INTER SECTION

(MAT RIX)

图 1

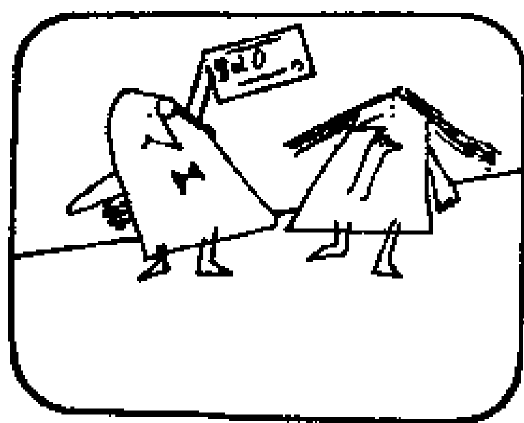
把字画成表示其意义的符号图，是现代广告的一种重要形式，特别是在电影广告中更为常见。电影片名常常印刷成使字母象征着片名的意义(图 2)。艺术家也常在书的封面上用这种办法印书名。街道和公路上的交通指路牌，是用词和符号相结合，形象地表示词意的又一种实例。



英国招贴画

图 2

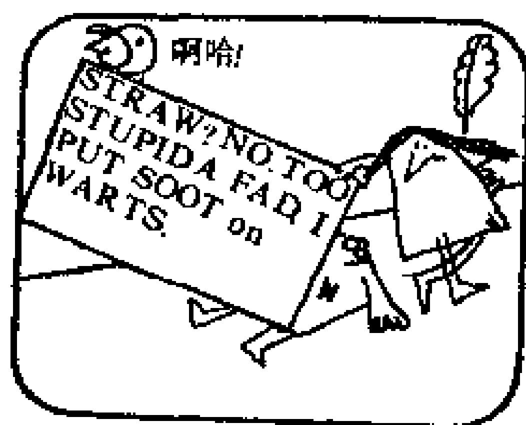
滑稽的句子



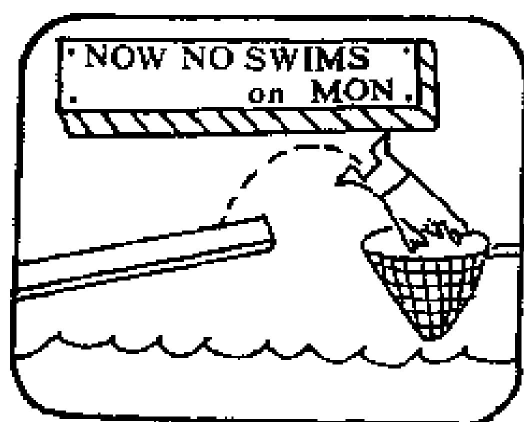
沃德尔博士：下一个任务让你告诉我，我写给你看的每个句子为什么那么奇特。答出一个可得奖 20 元。



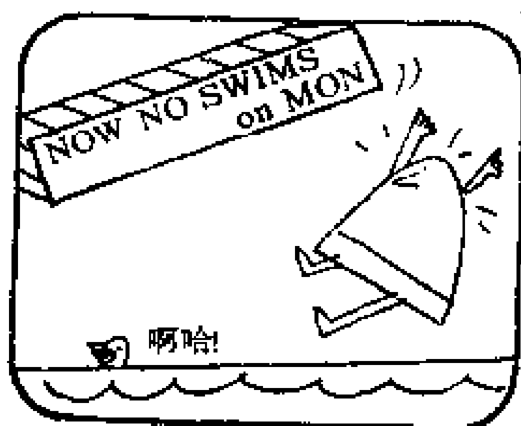
沃德尔博士：这是第一个句子。请仔细读一下，别再开玩笑了。



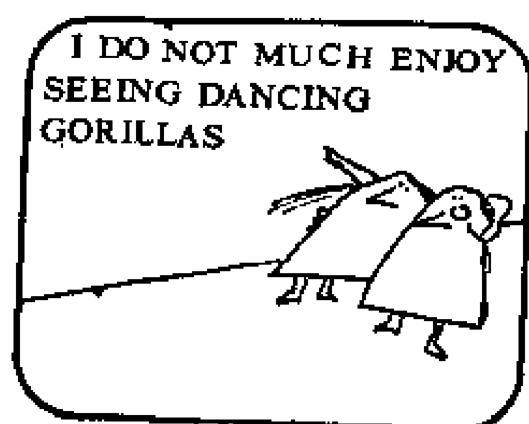
玛丽：好，这个句子是回文，就象我的名字一样。从前后两个方向拼写是一样的。



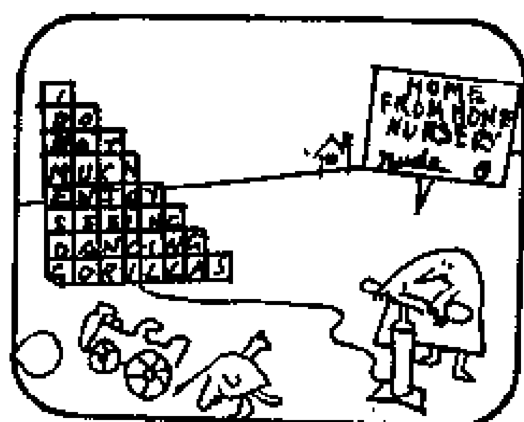
沃德尔博士：很好。下一个句子呢？



让我看一下，这也象是一句回文，但不完全对称，唉！我知道了，把这个句子颠倒过来看是一样的。



沃德尔博士：你又说对了，再看最后一个。

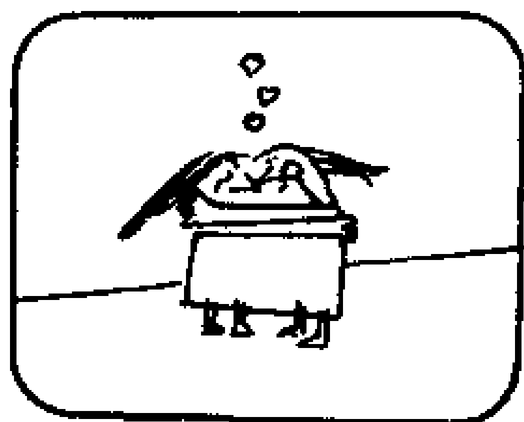


玛丽：我看这个图中的每个词都比前一个词多一个字母。

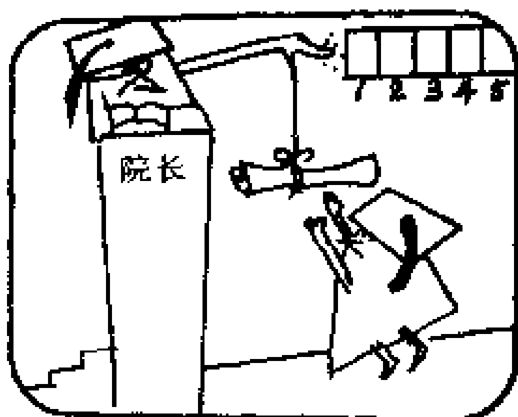


沃德尔博士：很好！这是另外的 20 元。你准备用这些钱干什么呢？

玛丽：我今天晚上请你吃饭，然后到我家去请你看看我收藏的词典。



沃德尔士博：太好了，玛丽，这是个好主意。晚上见。现在，距下一位客人到来之前还有一段时间，我得准备另一个小节目。



沃德尔博士：有一个由五个字母拼成的词，每个哈佛大学毕业生都把这个词读"错"了，这个是什么词？

更多的回文

每种重要语言都有数以千计令人惊叹的回文。创造回文并不难，你自己也可以试着创造几个。下面是几个有名的例子：

A man, a plan a canal——Panama!

(一个男人准备挖一条运河——巴拿马运河！)

Egad! A base tone denotes a bad age.

(哎呀！低音调表示不吉利的年代。)

Was it a can on a cat I saw?

(这就是我看见过的货船上的盒子吗？)

Live dirt up a side track carted is a putrid evil.

(在侧轨上的车箱里装着的活垃圾是个醜陋的病魔。)

Ten animals I slam in a net.

(我把十个动物装在网里了。)

在经典的回文中是以字母为单位的，也可以以词为单位来写回文。

回文与数学里称为左右对称的现象相似。人和绝大多数动物都是左右对称的。许多人造的物体也是左右对称的：例如椅子、咖啡杯和数以千计的其它东西。任何平面或三维的左右对称图形在镜子里看起来都一样。这也与回文的特性相类似，即如果使其符号的顺序倒过来的话，符号的顺序并不改变。

数字与字母一样也是符号，回文式数就是从左右两个方向读起来都一样的数。一个有名的尚未得到解答的数字问题，叫做“回数猜想”。取一个任意的十进制数，将其倒过来，并将这两个数相加。然后把这个和数倒过来，与原来的和数相加。重复这个过程直到获得一个回文式数为止。例如，只要三步就可由68获得回文式数：

$$
\begin{array}{r}
68 \\
+\ 86 \\
\hline
154 \\
+451 \\
\hline
605 \\
+506 \\
\hline
1111
\end{array}
$$

“回数猜想”就是：不论开始时采用什么数，在经过有限步骤之后都会得到一个回文式数。

还没有人能确定这个猜想是对的还是错的。已经知道这个猜想对于二进制记数法，或以2的幂为基础所表示的数是不成立的。对于用其它记数法表示的数则尚未证明。

可能成为这个猜想的反例的最小十进制数是196。计算机已对这个数进行了数十万步计算，没有获得回文式数。但是还没有人能证明它永远也不会产生回文式数。

数学家已经对同时也是素数（除1和该数本身以外没有其它因素的数）的回文式数进行了研究。数学家们相信有无穷个回文式素数，但是尚无法证明这一点。数学家还猜想存在无穷个回文式素数对。例如30103和30203，这些数中除了中间的数字以外其它数字都对称，这些数是依次连续的。

回文式素数必须有奇数个数字。每个有偶数个数字的回文式数都是11的倍数，所以不是素数。你能证明这样的数总可被11除尽吗？（提示：若一个数中所有偶数位数字之和与其奇

数位数字之和的差是11的倍数的话，这个数就能被11除尽。)

在回文式数中平方数是枚不胜举的，例如 $11\times11=121$。平方数中回文式数的比例，比随意选取的整数中回文式数的比例大得多。立方数也是这样。而且，回文式立方数几乎肯定有一个三次方根也是回文式数(例如：$11\times11\times11=1331$)。用计算机对回文式四次方数进行的研究，至今还没能找到一个四次方根不是回文式数的回文式四次方数。也没有人发现存在回文式五次方数。数学家们猜想不存在 x^k (K 大于 4) 形式的回文式数。

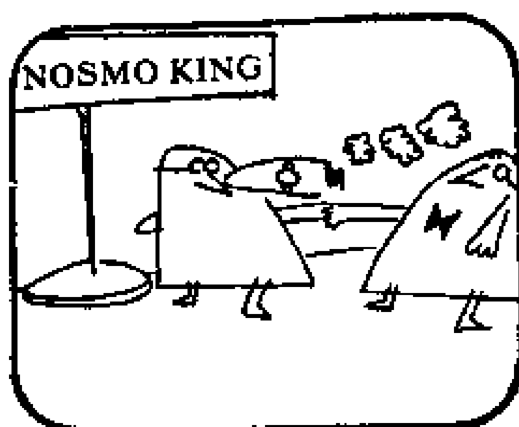
“Now No Swims On Mon”

(现在星期一没有游泳)

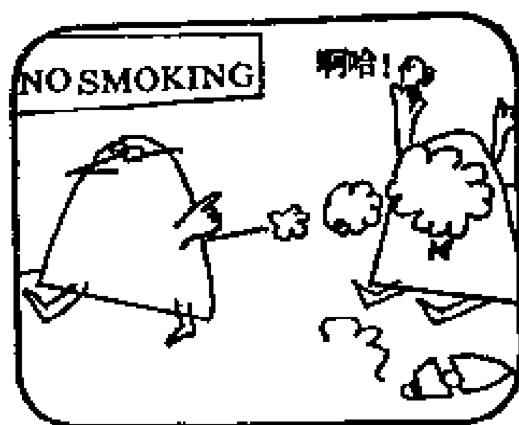
这个句子是已经发现的具有双重对称性的最长的句子。双重对称性就是旋转180度后原句不改变。具有这种性质的单词(无论是印刷体还是普通写法)很多。图3给出了几个这样的词。

图3 方向可以颠倒的字母和单词

可笑的名字



下一个客人是新泽西州哈克特镇香烟公司的总经理诺斯姆·金(Nosmo King)。为什么他的名字使沃德尔博士觉得可笑呢?



如果改变一下姓与名之间的间隔的位置,诺斯姆·金就变成了"No Smoking"(请勿吸烟)。

字符间隔

虽然这种事很平常,但是说明了"间隔"作为一种符号,对于理解句子是颇为重要的。词与词之间的间隔所起的作用与括号、间隔、零等等数学符号的作用相似。稍微改变一下一个括号的位置,常常就会使数学表达式的意义与原来的完全不同。这与前面"请勿吸烟"的例子相似。

许多词若被分成两部分就会改变原来的意义。例如,把Nowhere(什么地方都不)分成两部分就会变成Now here(现在在这里)。刘易斯·卡罗尔写了一个小故事,说的是有一个人以为他看见一块招牌上写的是Romancement("空想"),可是实际

上招牌上写的是 Roman Cement(天然水泥)。

下面是一个古老的招牌谜语，这个招牌很久以前挂在村庄的大街后面一个驿站的架子上：

TOTI EMU LESTO

你能通过改变间隔的位置使这个句子变得有意义吗*？

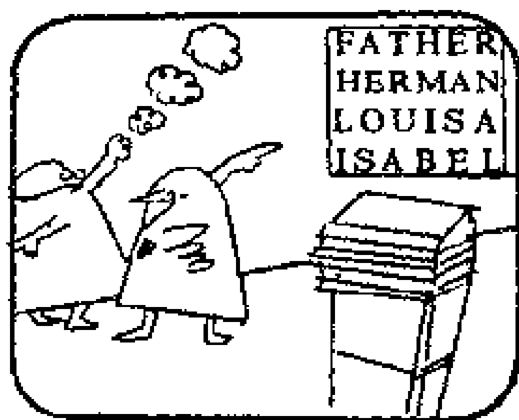
很久以前就有一种有名的谜语是找出隐匿在句子中的名字。这种谜语就是以这种方式构成。例如，一个州名及其首府名就隐匿在下面的句子中：

Can Eva dance outside, with cars on city streets?

(在城市街道上有汽车时伊娃敢在外面跳舞吗？)

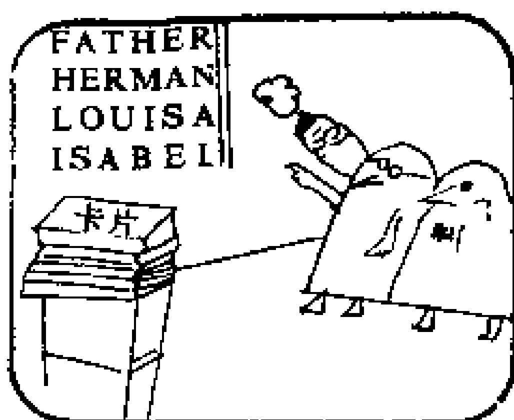
在该句中隐含的词是"Nevada"(内华达州)和 Carson city (卡森市)。

方卡片中的家谱



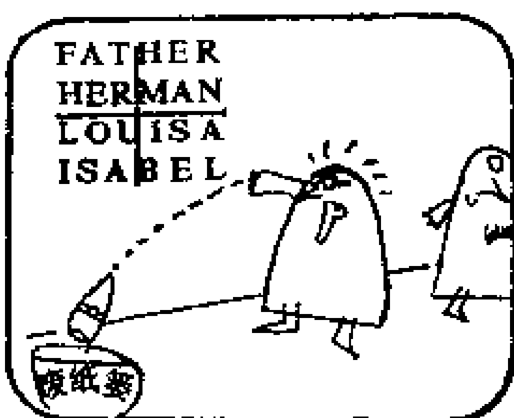
沃德尔博士：诺斯姆，你必需用这个方卡片写出一家四口人的名字，若答出这个问题，奖赏六盒高级古巴雪茄。

* 原意是 TO TIE MULES TO (系骡子处)——译注



沃德尔博士：在卡片上画三条直线则很容易把每个名字隔离在单独的区里，但你能够画二条直线把每个名字隔离在单独区内吗？

金先生：这是办不到的。



沃德尔博士：你错了，金先生，这是很便当的。必定是雪茄的烟雾把你的大脑熏得迷糊了。

直线与等分

啊哈！把每个名字分成两部分是可以办到的，可用不同方法将各组成部分构成同样的四个名字。

以这样一种画直线的方法为基础，还可以编造许多类似的难题。比如，把图 4 中的每一个圆都分别放到一个单独的区内，这是一个典型的例子。你能够在该图上画出三条直线而把每个圆放到一个单独的区吗？ 解决这个问题的窍门是，每个区不必为矩形，用这样一个方法出三条直线可以产生多达七个区。

把这一结果加以推广，可用数字来代替其中的圆，这时的难题是：画几条直线使每个区内的数字之和相等。或者使每个区内的数字总和有一些其它共同特性。你可在图 5 上用这种划分法试试。要求画四条直线使得每一区内有相同的“和数” 10。解决这个问题的方法示附于书末。

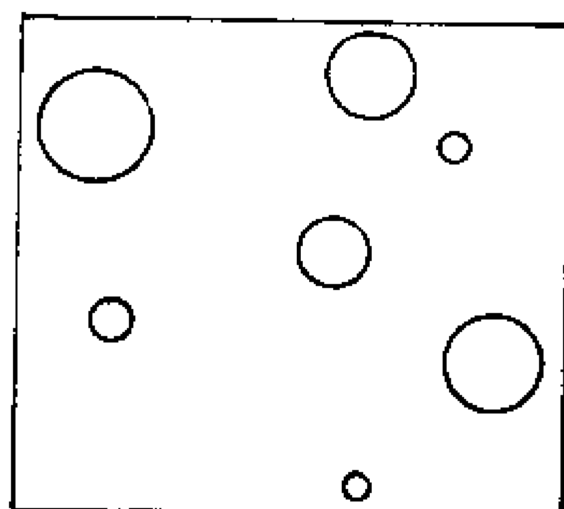


图 4

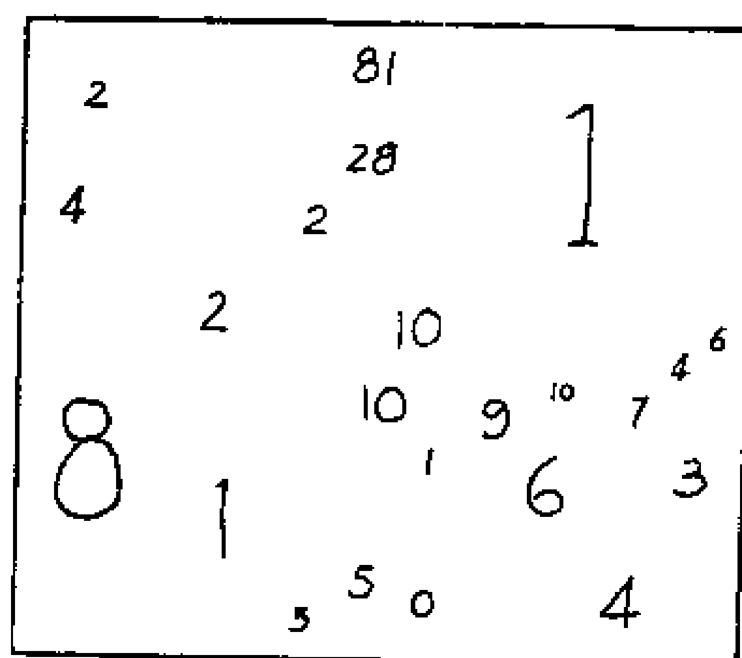
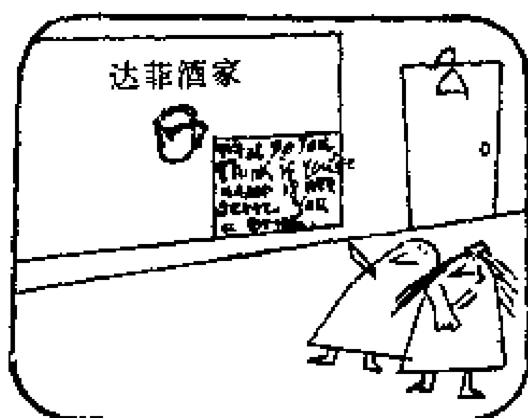
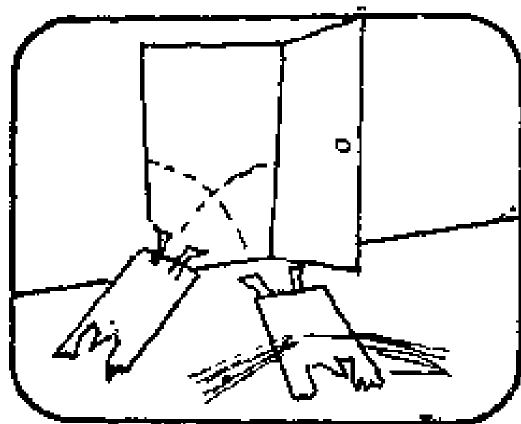


图 5

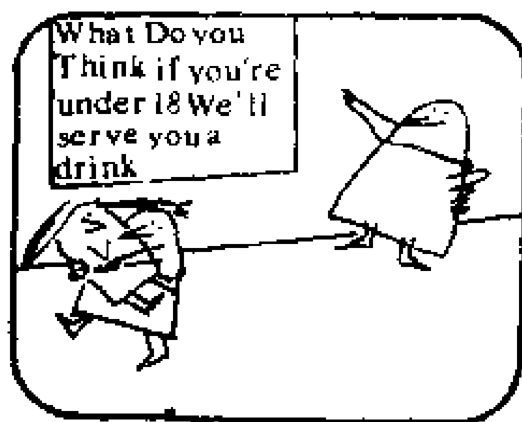
酒馆的招牌



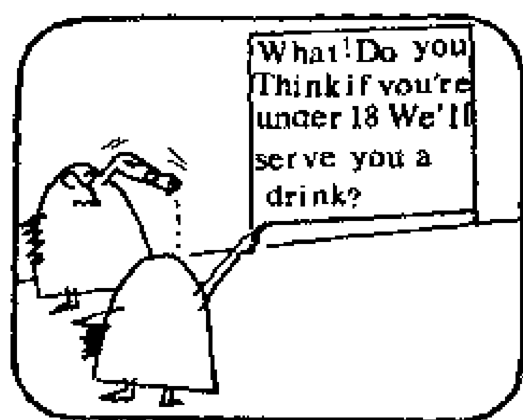
沃德尔博士：我再给你一个赢得六盒雪茄的机会。一家酒馆的窗户上有这样一块招牌：“What Do You Think if You're Under 18 We'll Serve You a Drink?



沃德尔博士：18岁以下的青年进去后，由于违反了章程而被赶了出来。



沃德尔博士：酒馆老板说在这个招牌上油漆匠漏掉了一个感叹号和一个问号。你的任务是补上这两个标点符号，使得招牌能表达老板的原意。



但是诺斯姆连一个标点符号都补不上去。沃德尔博士只得做给他看。

标点和符号

通过改变标点符号而使没有意义的叙述变得有意义，这样的谜语在许多老的谜语书中都可找到。同样也有这种形式的数字谜。例如有一个不正确的方程如下：

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9=100$$

现在要求改变方程左边的"运算符号"使方程式得以成立。只能使用加号和减号，但是可以改变数字之间的间隔，以形成较大的数。下面就是该例题中只用三个运算符号时的唯一解法：

$$123-45-67+89=100$$

加减号最多的解是：

$$1+2+3-4+5+6+78+9=100$$

还有九种其它解法：

$$123-45-67+89=100$$

$$123+4-5+67-89=100$$

$$123+45-67+8-9=100$$

$$123-4-5-6-7+8-9=100$$

$$12-3-4+5-6+7+89=100$$

$$12+3+4+5-6-7+89=100$$

$$1+23-4+5+6+78-9=100$$

$$1+2+34-5+67-8+9=100$$

$$12+3-4+5+67+8+9=100$$

$$1+23-4+56+7+8+9=100$$

$$1+2+3-4+5+6+78+9=100$$

也可提出数字按递减顺序排列的同类问题。如果象前面那样禁止在第一个数字前使用负号的话，这个问题就有 15 个解：

$$98-76+54+3+21=100$$

$$9-8+76+54-32+1=100$$

$$98-7-6-5-4+3+21=100$$

$$9-8+7+65-4+32-1=100$$

$$9-8+76-5+4+3+21=100$$

$$98-7+6+5+4-3-2-1=100$$

$$98+7-6+5-4+3-2-1=100$$

$$98+7+6-5-4-3+2-1=100$$

$$98+7-6+5-4-3+2+1=100$$

$$98-7+6+5-4+3-2+1=100$$

$$98-7+6-5+4+3+2-1=100$$

$$98+7-6-5+4+3-2+1=100$$

$$98-7-6+5+4+3+2+1=100$$

$$9+8+76+5+4-3+2-1=100$$

$$9+8+76+5-4+3+2+1=100$$

若第一个数字前允许使用负号，则按递减顺序还有三个解：

$$-9+8+76+5-4+3+21=100$$

$$-9+8+7+65-4+32+1=100$$

$$-9-8+76-5+43+2+1=100$$

若第一个数字前允许用负号，则按递增顺序还有一个解：

$$-1+2-3+4+5+6+78+9=100$$

当然，“标点符号”可以不限于加号和减号，右边的和数也可以不是 100。例如，和数可以是今年的最后两位数字，或者你喜

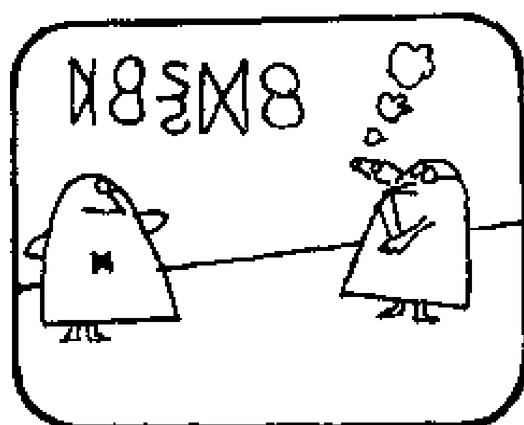
欢的其它任何数。

你能否在下述方程中只加一对括号就使其成立？

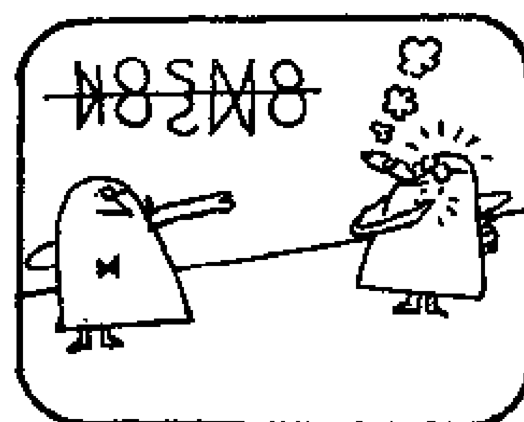
$$1-2-3+4-5+6=9$$

答案附于书末。

隐蔽的符号



沃德尔博士：金先生，我们现在准备给你看三张奇怪的符号图。每张图隐藏着一个词。猜出其中任何一个词就可得到这些雪茄。这是第一个，你能看出结果来吗？

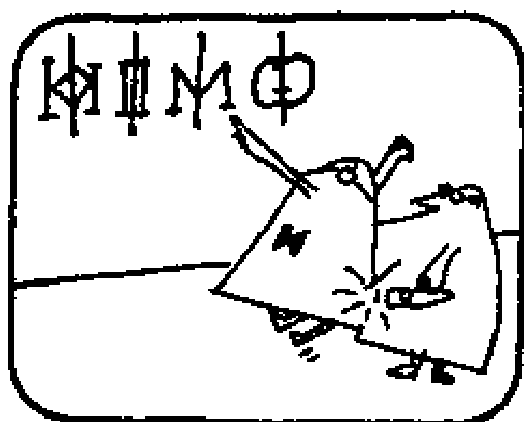


金先生：我看不出，结果是什么呢？

沃德尔博士：这是你的名字诺斯姆(Nosmo)。我把你的名字象湖中的倒影那样映照在一条线之下，就构成了这个符号。



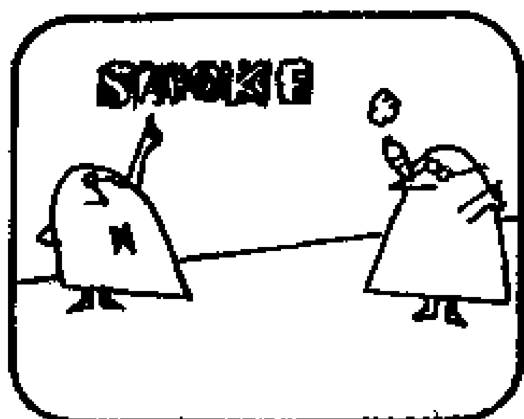
沃德尔博士：好，第二张你能看出什么来吗？



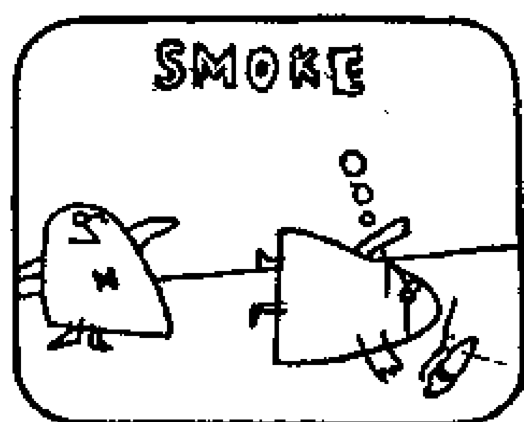
沃德尔博士作解释时，金先生只是摇头。

沃德尔博士：这次的符号是使每个字母相对于垂直对称轴映照而形成的，这是单词KING（王，国王），你瞧多简单啊！

金先生：这对我来说并不那么简单。



沃德尔博士：好，这是最后一张图。你还有一次机会。



金先生还是回答不出来，沃德尔博士只得在符号上下加二条黑线，便现出“SMOKE”（吸烟）这个词。

对称游戏

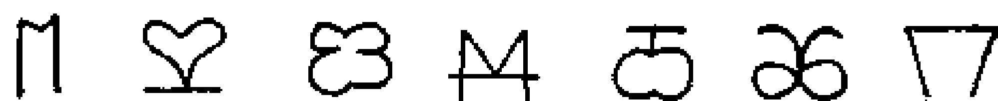
在第一组怪符号中，每个字母相对于水平对称轴而映到下面。注意，“NOSMO KING”中的某些字母倒映后不变。“O”、“K”和“I”等字母具有水平对称轴。

在第二组符号里，每个字母相对于垂直对称轴而映照后，某些字母也不改变，“O”、“M”和“T”等字母具有垂直对称轴。由于“O”和“I”具有两种对称轴，所以用一面镜子在上、下或左、右映照时，这两个字母都不变。如果有兴趣的话，你可以分析一下所有的字母(大写和小写字母)，看看每个字母具有哪种对称性。

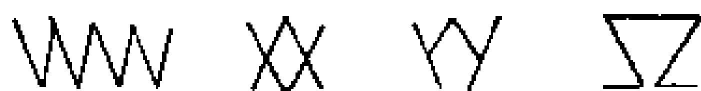
你能够构成一个用镜子在其上面映照时不变的词吗？可以，“CHOICE”(选择)就是数百个这类词中的一个。是否有在垂直印刷时旁边放一面镜子而映照时不变的词？有，“TOMATO”(西红柿)就是数百个这类词中的一个。

具有至少一条对称轴的平面图形，在镜子里的图象是与原图形一样的，虽然有时必须把一个图象旋转一下，使原图形及其映像的方向一致。任何具有对称平面的立体图形在镜子里看起来是一样的。其原因是对称面把这类物体从头到脚截成了两半。

可以设想出许多有趣的、与前面两个镜子谜语相仿的谜语。例如，下面这些图形是什么东西？

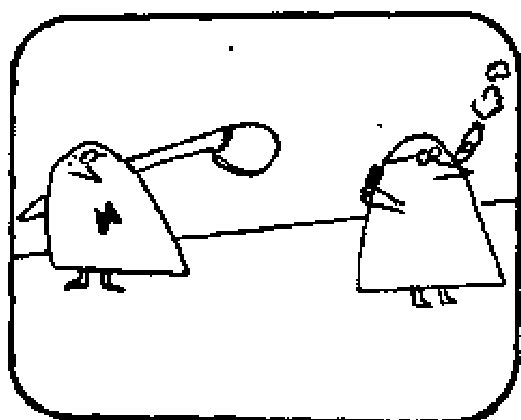


下面这几个图形更难辨认：

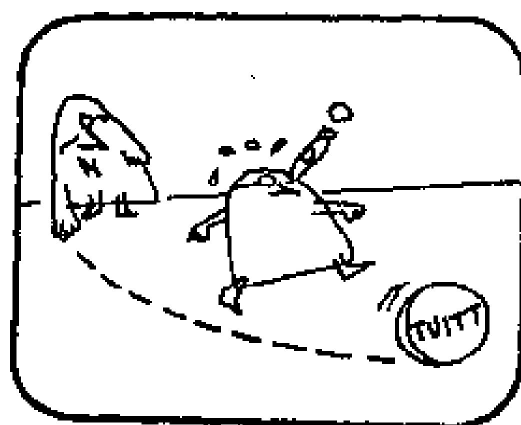


字母“SMOKE”是以完全不同的办法隐蔽的。一般倾向于把黑的区域看成是形状奇特的图形，而不把黑区之间的白区看成字母的形状。这就像看照相底片一样。若不在该词上、下画上水平边界的话，则很难看出这个词。读者可以试着以同样的方式画出其他的词来。

镀金的模型飞机

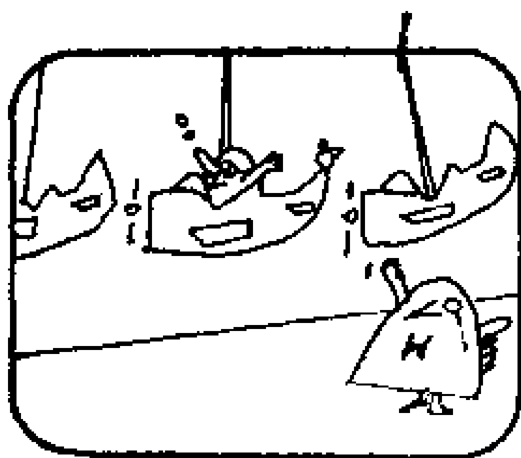


沃德尔博士：金先生，很抱歉，你无法赢得这些雪茄了。鉴于你如此喜爱运动，我特意准备了这镀金的模型飞机。



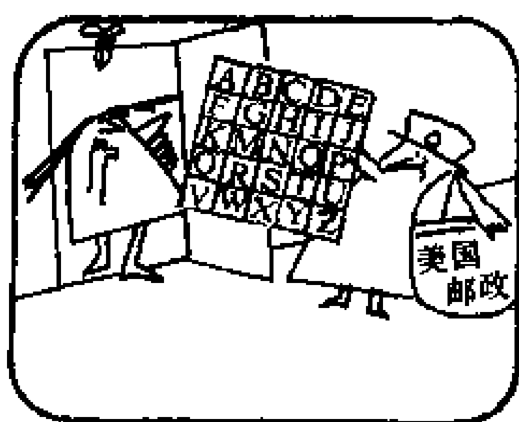
金先生：谢谢。可是什么叫“模型飞机”？

沃德尔勃士：如果你一旦了解了它的话，那么就不是没有你总想要做的事了吗？



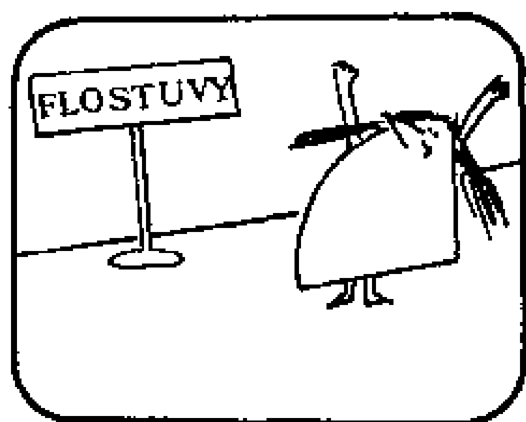
金先生：有。我总是想学学怎样开飞机。

沃德尔博士：好，现在你得到了一个环转的模型飞机。金先生，好运气。谢谢你能和我的想法一致。

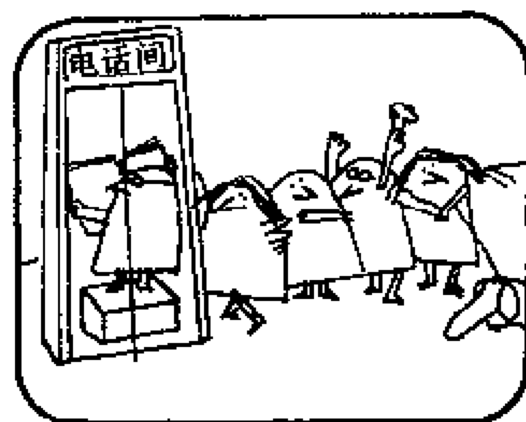


沃德尔博士：在下一位客人正在化妆的时候，我想为观众表演另一个快短剧。这是我去年寄给我所有的朋友的贺年片，你能发现其中的秘密信息吗？

弗罗·斯特菲



在这场表演的最后一位客人是弗罗·斯特菲小姐。你认为是出于什么原因选她作为选手呢？



她的名字是按字母顺序排列的，象她这样的名字是不容易找到的。你可以试试看在电话簿里能找到多少这样的名字。

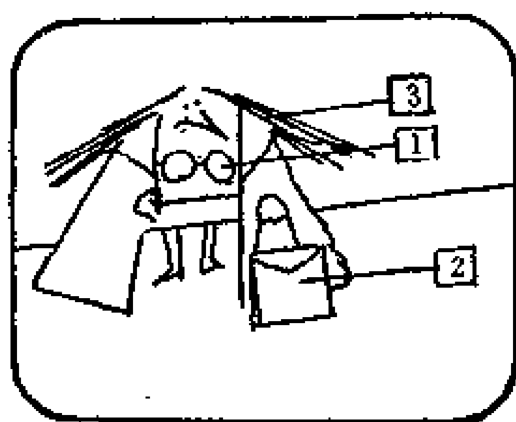
招 贤 榜

按字母顺序排列的名字是不容易找到的。贝蒂(Betty)是个较普通的例子。实际使用的最长的这类名和姓之一是艾比·

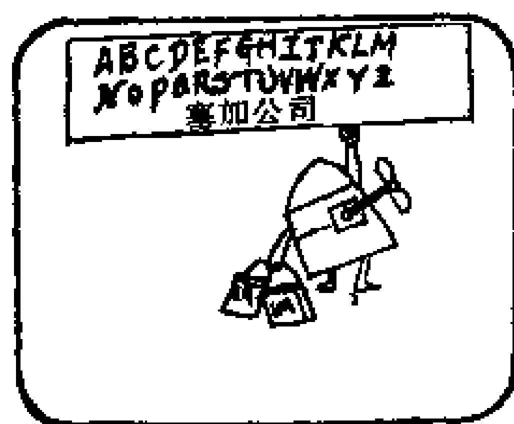
F·吉劳特 (Abbe F. Gillott)。你能找到一个由四个以上字母并按顺序组成的单词吗？"Billowy"（巨浪似的）是最长的单词之一。象"Dirt"（灰尘）之类的短词是很容易找到的，但是发现较长的词就难得多。

时而会看到有些诗的排列是按词的第一个字母，即从 A 到 Z 的规律写成的。其中最好的诗之一是《木母鸡和其它驯服动物》一书中约翰·厄普蒂克斯的诗——"能力"。

奇妙的字母序列



沃德尔博士：斯特菲小姐，你的脑子偏狭吗？我们准备给你看三个字母序列的问题。解答出一个问题可奖给一件游泳衣；解答出两个可再得到一个皮包；三个问题都解答出来还能得到一件貂皮外套。



沃德尔博士：这是第一个问题。请注意：有些字母是红的，其余的是蓝的。画家是按什么规律把字母分成两种颜色的？

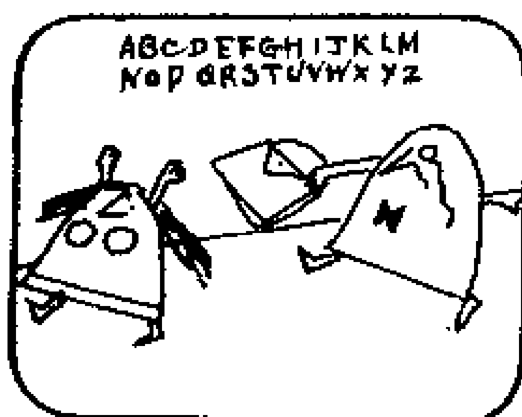


斯特菲小姐在回答之前，研究了这些字母几乎达一分钟左右。

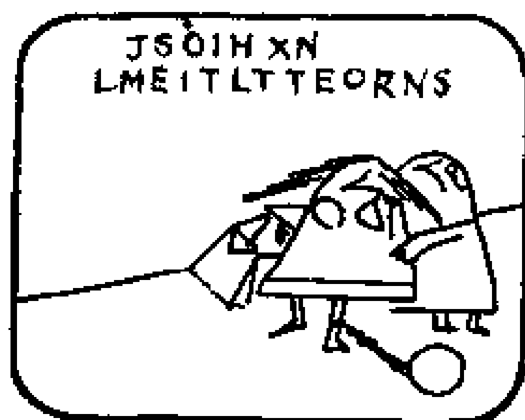
斯特菲小姐：知道了！每个红字母至少有一条曲线笔划，而蓝色字母完全是由直线构成的。



沃德尔博士：你赢得了游泳衣，斯特菲小姐。现在来争取这个皮包吧，这些字母分成红色和蓝色的规律是什么？



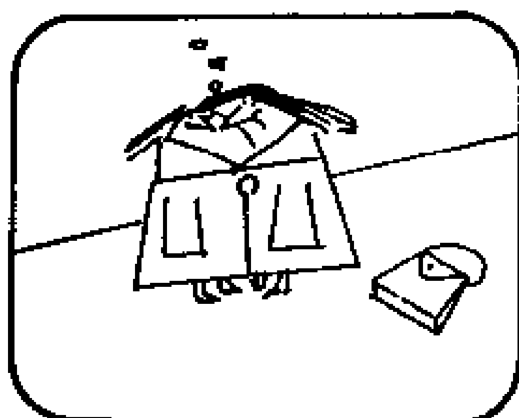
斯特菲小姐：让我们来想一下，这既不是按直线、曲线分的；也不是按有没有圈划分的；又不是按声韵划分的。噢，我知道其中的奥妙了。红色字母在拓扑学上是等价的，都象直线。



沃德尔博士：说得很对，斯特菲小姐。现在再来夺得这件貂皮外套吧，你能否把图中序列去掉六个字母，使剩下的一组顺序字母能拼成一位名诗人的名字？



斯特菲小姐在找到正确答案之前考虑了一会儿。然后她干净利索地去掉“六个字母”(S-I-X-L-E-T-T-E-R-S)这十个字母，答案是“JOHN MILTON”*。



斯特菲小姐由于得到了这些礼物而高兴得与沃德尔博士紧紧地握手!

字母的拓扑学

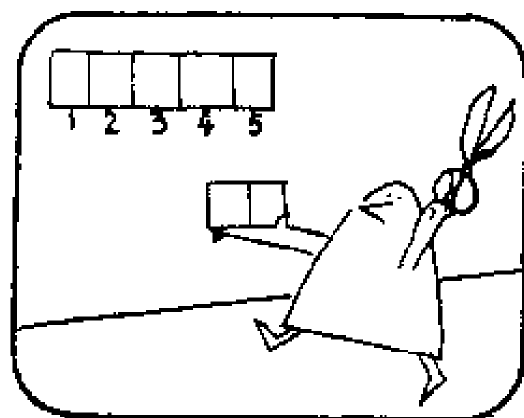
第一个问题是根据直线和曲线之间的几何差异而定的。第二个问题是以简单的开口曲线和闭合或分支曲线的拓扑学差异为基础的。

如把大写字母看作是由可以伸缩的弹性材料做成的，甚至还可以从一个平面里取出放到另一点上去。如果一个字母可以通过这样的变形过程变成另一个字母，则这两个字母在拓扑学上就是等价的。当然不允许把字母分成两半，或者把一个字母的一部分连到该字母的其它地方去。把所有大写字母分成拓扑学上等价的几类是个有趣的练习。

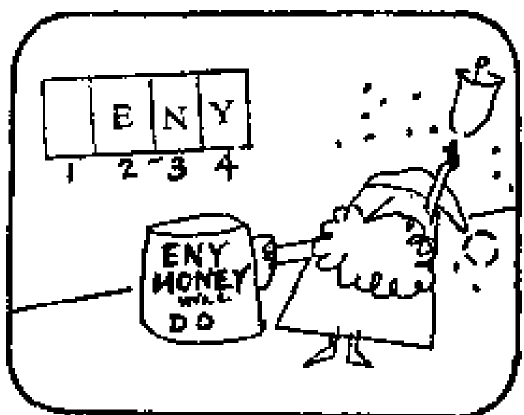
例如，E、F、Y、T 和 J 在拓扑学上是相同的，但是 K 和 X 属于另一类，两类是不同的。同样可以对小写字母及数字进行分类，但是必须注意各字母印刷体的形状差异。

*约翰·弥尔顿(John Milton)，英国著名诗人——译注

最后的话



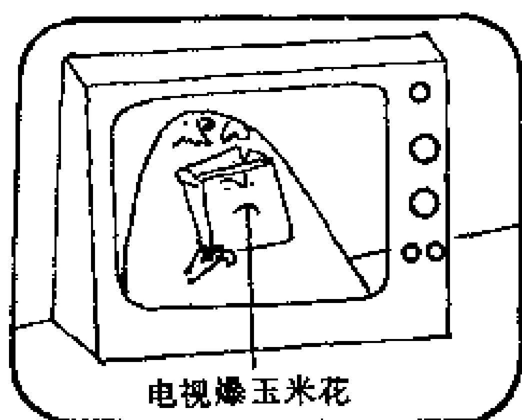
沃德尔博士：观众们，现在我把另外三个问题留给你们。第一个问题是：哪个由五个字母构成的单词加上比较级后缀“er”后变得更短了？



第二个问题是：哪个由四个字母组成的词是以“ENY”为结尾的？



第三个问题是：你能否想出一个只有一个元音而共有九个字母组成的词？



沃德尔博士：今晚"沃德尔"节目到此为止。你们是些了不起的观众，下星期在这个频道和这个时间里再见。

结　束　语

这些问题回答如下：

1．Short（短）加上"er"两个字母之后，就变成Shorter（更短）了。

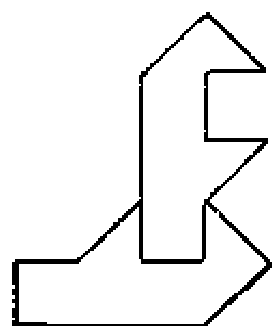
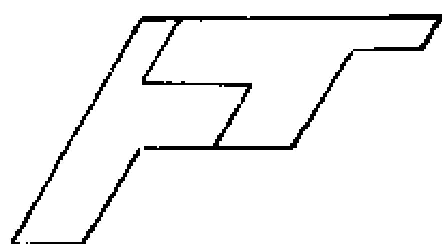
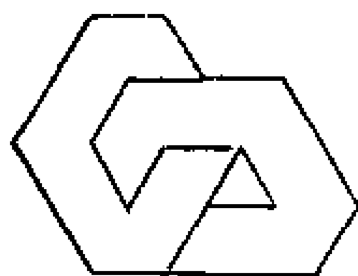
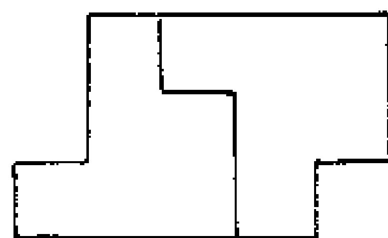
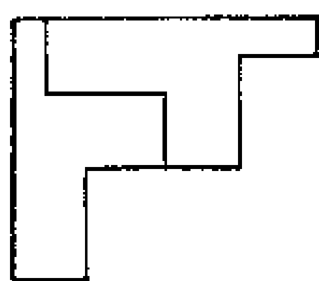
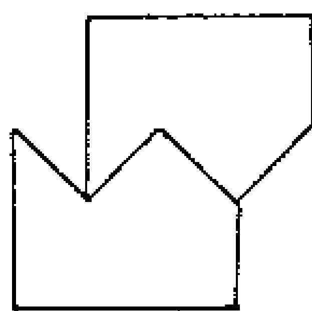
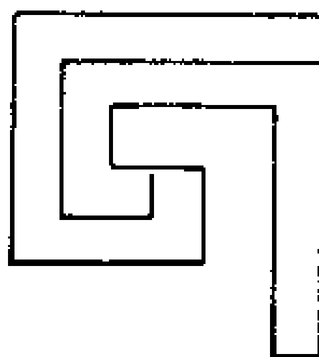
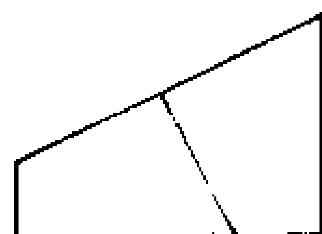
2．以"eny"结尾的四个字母组成的词是"deny"（否认）。

3．只有一个元音而共有九个字母组成的词，实际上以单数形式出现在图中，这个词就是"Strength"（力量）。

附录 答　　案

第二章　几何

巧妙的划分：剖分理论

第三章　数字

掰开的唱片：分整为半

42

眼睛与脚：两脚与四脚

解答的窍门，首先应掌握有些动物（如蛇）是没有脚的这个窍门后，就不难找出唯一的解法：四只四脚的畜牲，两只两脚的动物，还有五条蛇。

撞车事件：倒算法

假如你回答说，时间为原来的问题中的1/3，即12/3＝4小时，这就错了。答案完全同前面的情况一样！

原来那个问题，在第一小时结束时，第一个胞子变为三个，这是开始变化的正确情形。因此，假如原来的问题是用12小时使容器充满的，那么在变相的问题中，就缩短1小时，亦即11小时，因而容器在11点钟时充满。

亨利叔叔的钟：拨钟点

假如时钟用5秒钟敲6点，那么在敲钟之间的间隔时间为1秒，所以要经过11秒钟才敲12点。

亨利叔叔睡了40分钟。

1776计算的实质：模数运算

此题解法的诀窍与前面两个问题的解法一样，即以相反的步序来计数。把黑桃老K面朝下放在手中，再把数值为12的Q放在老K下面，然后从底向面上翻迭12张牌。把J（数值为11）放在这迭牌的底部，再从底向面上传送11张牌。照此法翻迭下去！只是在某一时刻会出现相反的约瑟夫斯计数，最后以达到13张牌的正确次序而结束。

约瑟夫斯计数不一定局限于连续的数字，这种步序只不过介绍有关一迭牌的约瑟夫斯计数排列法，而约瑟夫斯计数法完

全适用于任意的数字。这就是说，不论什么数字都行，而且可以用任意指定的次序进行。

下面采用与上述相同的13张纸牌的游戏，以证明这种计数法。唯一不同之处为不使用统计数字，我们把牌从面上转换到底部，拼出每张牌的名字。开始时，这些牌从上到下的次序是：Q、4、A、8、K、2、7、5、10、J、3、6、9。一次把牌移到底部，拼出A-C-E。把E牌的面朝上，它是爱司。把爱司放在旁边，然后拼T-W-O，这样依次拼下去，直到把13张牌全部拼完为止。

这些牌原来的编排顺序同样是用前面介绍的时间相反步序决定的。其实可以把52张牌按这种方式在整张桌面上进行编排，利用每张牌的全称，例如A-C-E-O-F-S-P-A-D-E-S，然后比方说取黑桃、红桃、梅花、方块这一顺序，就可以拼出所有52张牌。

约瑟夫斯计数步序的应用范围是十分广泛的，可以拼出无论什么名字。举例来说，你可以在桌子上放一些文件卡片，上面可以画有你喜欢的任何图形——动物、十二宫、名人头象等等。时间相反步序可以使你这样编排纸卡，即通过这张桌子上的纸卡可以拼出每张画面的名字来，而且在每次拼读结束时，总能处置相应的那张纸卡。

第四章　逻辑

关于六个冒失小伙子的谜语：小伙子回答

1．当他发现汤里有苍蝇前，他在肉汤里已放了盐。

2．水决不会到达舷窗，因为船会随潮汐而升高。

3．当里维兰特·索尔·卢尼在上面走的时候，赫德森河在靠近岸边已经结冰了。

4．一列火车是在另一列火车通过之后一小时穿过隧道的。

5．该犯人靠近一座大桥的一端。在警车追上他之前，他必须朝逼近他的警车跑过去，以便逃离这座大桥。

6. 1,977 张钞票的面值是 1,977 元，1,976 张钞票的面值只是 1,976 元。

拘留：未找到证据

假如你熟悉盒式录音机就会知道，若史密斯曾进入房间，那时琼斯已经停止录音了，磁带应一直没有倒过。真正凶手必定听过几次这样的录音，而且确信发音相象，使磁带倒回至开始之处使他留下了疑点。

阿克博士的试验：阿克博士的解答

1. 在你把火柴丢下之前，先在中间把它折弯。

2. 把沙慢慢泼进洞里，小鸟就上来。

3. 在绳子上形成一小环，在其底部打一结，再剪断此环。

4. 从这根棒上割下一块 20 厘米长、截面积为 20厘米×50毫米(即5厘米)的木片，这样就完完全全地补好了孔。

5. 用尺测出瓶的内径和液位高度。液体为圆柱体，其体积很容易算出。把瓶子倒过来，这时空气形成了另一高度较低的圆柱体，同样能方便地测出它的高度，算出它的体积。把空气的体积加上液体的体积，就得出了瓶子的总容量，液体的百分比便很容易计算了。由于这两个圆柱体容积的直径相同，实际上只要测出它们的高度就可得出百分比。

理发店的玩笑：料想不到的解法

1. 他提议，各驾驶员都开别人的汽车，亿万富翁把奖金授给他的汽车跑在最后一名的司机，而不给驾驶员本人。

2. 把点燃的火柴放在水杯下面。

3. 观众坐在自己车内看电影或演出的剧场。

4. 他先走进另一间房间，再四肢着地，"爬入"房内到达瓶那儿("crawls in"to the bottle)。

5. 比赛开始前，任何球赛的记分都是零比零。

6. 鹦鹉是聋的。

7．把木塞压入瓶里。

太阳谷的凶手：单程旅票

1．外科医生是孩子的母亲。

2．法国男子吻了他自己的手，接着打了一记纳粹军官的耳光。

喷泉处的凶手：镜子目击

1．仆人把箱子倒放，然后把盖子拉开一点点，仅仅使几颗金刚钻掉出。

2．夫人是步行，没有驱车。

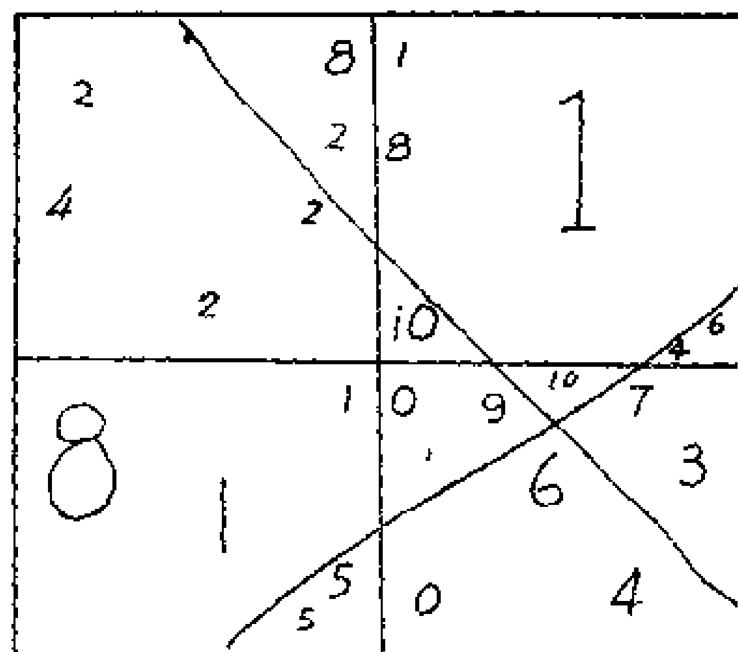
第六章　文字

世界上最小的纵横字谜：方阵和字谜

沃德尔博士问题的答案是："NEW DOOR" 字母可以重新拼排为 "ONE WORD"。

方阵族：直线和相等

第六章图5上面画上四条直线而形成11个区域，文字窍门可见下图：



酒馆的招牌：标点和符号

$$1-(2-3+4-5)+6=9$$